F3500

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI

SERIA METALURGIE

TOMUL L, ANUL 1988

Comitetul de redacție

Redactor responsabil : Prof. dr. ing. *Voicu Tache*
Redactor responsabil adjunct : Prof. dr. docent *Traian Demian*
Secretar științific : Prof. dr. ing. *Sergiu Călin*
Membrii : Prof. dr. ing. *Constantin Bălă* ; Conf. dr. ing. *Cornel Berbente* ; Prof. dr. docent *Gheorghe Buzdugan*, membru corespondent al Academiei R. S. România ; Prof. dr. ing. *Ioan Carabogdan* ; Prof. dr. docent *Virgil Constantinescu* ; Prof. dr. ing. *Octavian Floarea* ; Prof. dr. ing. *Julieta Florea* ; Prof. dr. *Ion Grădișteanu* ; Prof. dr. ing. *Gheorghe Hortopan* ; Prof. dr. ing. *Moise Ienciu* ; Prof. dr. ing. *Vlad Ionescu* ; Prof. dr. ing. *Adelaida Mateescu* ; Prof. dr. ing. *Nicolae Murguleț* ; Prof. dr. ing. *Aurel Oprean* ; Prof. dr. ing. *Mircea Petrescu* ; Prof. dr. ing. *Ion Popescu* ; Conf. dr. ing. *Mircea Radeș* ; Conf. dr. ing. *Sorin Roșca* ; Prof. dr. ing. *George Rulea* ; Prof. dr. ing. *Marcel Segărceanu* ; Prof. dr. ing. *Alexandru Spătaru* ; Prof. dr. *Octavian Stănășilă* ; Prof. dr. docent *Ion Teoreanu* ; Prof. dr. docent *Andrei Țugulea* ; Prof. dr. ing. *Silvia Vacu* ; Prof. dr. docent *Rodica Vîlcu* ; Academician *Radu Voinea*.

L: 042 375

Editor : Institutul Politehnic București
Splaiul Independenței 313, Tel. 31.40.10. România, Căsuța poștală 2356

Readers from abroad can get subscriptions for this newspaper through ROMPRESFILATELIA, Import export press, P.O. Box 12-201, Telex 10378, Calea Griviței 62—64, Bucharest, ROMANIA

Sumar

M. Geanău
Polifunctori (l. engleză) 3

M. Rebenciuc
Asupra relațiilor binare neomogene într-o categorie (l. engleză) 11

D. Marcu
Determinarea mulțimilor interior stabile maximale ale unui graf neorientat (l. engleză) 21

V. A. Mărieș
Calculul numeric al unor funcții Bessel de speța întîi și al derivatelor lor . . . 29

Iuliana Cuculescu, Rodica Bena
Dinamica microdomeniului colesteric în mișcare turbulentă (l. engleză) 35

M. Ienciu, P. Moldovan, N. Panait, Lidia Cristea, Gabriela Popescu
Cercetări privind aspecte ale mecanismului de modificare a aliajelor de aluminiu speciale 39

D. Taloi
Unele considerații privind termodinamica aliajelor binare 45

C. Bratu, L. Sofroni, Fl. Ștefănescu
Cercetări privind modelarea fizică a procesului de formare a retasurilor în piesele turnate din oțel 55

Rodica Murgulescu, P. Moldovan, Gabriela Popescu, C. Miron
Posibilități de prelucrare a lipiturilor formate în cuptorul de topire în suspensie a concentratelor cuproase 65

Mihaiela Isac
Comportarea la deformare plastică la cald a unui oțel microaliat pentru construcții metalice de tip Cr—Mo—B—V—Ni. 71

Alexandra Dobre, Simona Zamfir
Fenomenul de fragilitate la revenire în cazul unor oțeluri pentru arcuri . . . 79

M. Ienciu, P. Moldovan, C. Dumitrescu, N. Panait, Lidia Cristea, Gabriela Popescu
Comportarea elementelor volatile la degazarea în vid a aliajelor de aluminiu destinate industriei aeronautice 85

Rodica Murgulescu, P. Moldovan, Gabriela Popescu
Procese de licuație la prelucrarea pirometalurgică a scoarțelor cupro-plumboase rezultate la decuprarea plumbului brut 97

Summary

M. Geanău
Polyfunctors (I) 3

M. Rebenciuc
On binary Non-Homogeneous Relations in a Category (I) 11

D. Marcu
Finding All Maximal Independent Sets of an Undirected Graph 21

V. A. Măriеș
Numerical Calculus of Some Bessel Functions and Their Derivatives 29

Iuliana Cuculescu, Rodica Bena
Cholesteric Texture Microdomain Dynamics in Turbulent Motion 35

M. Ienciu, P. Moldovan, N. Panait, Lidia Cristea, Gabriela Popescu
Investigations of Some Aspects of Mechanism of Grain Refining of Special Aluminium Alloys 39

D. Taloi
On the Thermodynamics of Binary Alloys 45

C. Bratu, L. Sofroni, Fl. Ștefănescu
Physical Modelling of the Formation of Shrinkage in Steel Castings 55

Rodica Murgulescu, P. Moldovan, Gabriela Popescu, C. Miron
Ways of Processing the Solders Formed in Suspension Melting Furnace of Copper Concentrates 65

Mihaiela Isac
The Behaviour on Warm Plastic Deformation of Microalloyed Steel for Metallic Constructions Type Cr—Mo—B—V—Ni 71

Alexandra Dobre, Simona Zamfir
Fragility Phenomenon from Some Types of Steel 79

M. Ienciu, P. Moldovan, C. Dumitrescu, N. Panait, Lidia Cristea, Gabriela Popescu
The Behaviour of Volatile Elements in Vacuum Degasing Process of Aluminium Alloys for Aeronautical Industry 85

Rodica Murgulescu, P. Moldovan, Gabriela Popescu
Processes of Liquation at Pyrometallurgical Processing of Copper-Lead Crusts Obtained in Liquation Refining of Lead from Copper 97

C.Z. : 510.5

POLYFONCTEURS (I)

M. GEANĂU*

Dans cet ouvrage on élargit les notions de foncteur, composition des foncteurs et par conséquent les propriétées énoncées sont des généralisations de celles connues dans le cadre des foncteurs.

Définition 1. Soit $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ deux catégories ; un polyfoncteur covariant $F : \mathscr{C}' \to \mathscr{C}$ consiste par les données suivantes :

1) Un foncteur (covariant) $F^* : \mathscr{C}' \to \text{Ens}$;

2) Une application $X' \to (F_\alpha(X'))_{\alpha \in F^*(X')}$ qui associe à chaque objet X' de la catégorie $\mathscr{C}'$ la famillle des objects de $\mathscr{C}(F_\alpha(X'))_{\alpha \in F^*(X')}$.

3) Une fonction : $F^*(X') \times \mathscr{C}'(X', Y') \to \mathscr{C}(F_\alpha(X'), F_{F^*(u')(\alpha)}(Y'))$ qui associe à l'élément (α, u') le morphisme dans $\mathscr{C}$ désigné par $F_\alpha(u') : F_\alpha(X') \to$ $\to F_{F^*(u')\alpha}(Y')$.

Ces données satisfont les conditions :

(i) Quelque soit $\beta \in F^*(X')$ et quelque soit le diagramme de $\mathscr{C}'$, $X' \xrightarrow{u'} Y' \xrightarrow{v'} Z'$, le diagramme suivant de $\mathscr{C}$ est commutatif

$$\begin{array}{ccc} F_\beta(X') & \xrightarrow{F_\beta(u')} & F_{F^*(u')(\beta)}(Y') \\ & \searrow^{F_\beta(v'u')} & \downarrow{\scriptstyle F_{F^*(u')(\beta)}(v')} \\ & & F_{F^*(v')F^*(u')(\beta)}(Z') \end{array}$$

c'est-à-dire $F_\beta(v'u') = F_{F^*(u')(\beta)}(v') \cdot F_\beta(u')$, $\forall\, \beta \in F^*(X')$.

(ii) $F_\alpha(1_{X'}) = (1_{F_\alpha(X')}\ \forall\ X' \in |\mathscr{C}'|$ et $\forall\ \alpha \in F^*(X')$,

D'une manière analogue on peut définir la notion de polyfoncteur contravariant de $\mathscr{C}'$ à $\mathscr{C}$, la différence consiste dans le fait que le foncteur $F^* : \mathscr{C}'^0 \to \text{Ens}$ est contravariant et la fonction : $F^*(Y') \times \mathscr{C}'(X', Y') \to$ $\to \mathscr{C}(F_{F^*(u')(\alpha)}(X'), F_\alpha(Y'))$ associe à l'élément (α, u') le morphisme $F_\alpha(u') : F_{(F^*(u')(\alpha)}(X') \to F_\alpha(Y')$.

Observation. Tout foncteur $F : \mathscr{C}' \to \mathscr{C}$ est un polyfoncteur covariant ou contravariant, en lui associant le foncteur $F^* : \mathscr{C}' \to \text{Ens}$ défini par $F^*(X') = \{*\}$ le même pour tous les objects X' et $F^*(u') = 1_{\{*\}}$ quelque soit $u' \in \mathscr{C}'(X', Y')$ et $F_{\{*\}}(X') = F(X')$.

---

* Assist., Chaire de mathématiques

Exemple 1. Soit $\mathscr{C}'$ la catégorie des espaces topologiques séparables et soit $\mathscr{C}$ la catégorie des espaces topologiques compacts nonvides.

Le foncteur $F^*: \mathscr{C}' \to \text{Ens}$ est défini ainsi: si $X' \in |\mathscr{C}'|$ alors $F^*(X')$ est l'ensemble des sous-espaces compacts nonvides de X'; pour tout morphisme $u': X' \to Y'$ dans $\mathscr{C}'$ le morphisme $F^*(u)': F^*(X') \to \to F^*(Y')$ est défini par la relation $F^*(u')(\beta) = u'i(\beta)$ quelque soit le sous-espace (β, i) de X'. Si $\mathscr{A}' \in (\mathscr{C}')$ on prend $(F_\alpha(\mathscr{A}'))_{\alpha \in F^*(\mathscr{A}')}$ la famille des sous-espaces compacts nonvides de $\mathscr{A}'$ et comme application qui définit la famille on prend l'application indentique. A l'élément $(\beta, u') \in \in F^*(X') \times \mathscr{C}'(X', Y')$ on associe dans $\mathscr{C}$ le morphisme $F_\beta(u'): F_\beta(X') \to \to F_{F^*(u')(\beta)}(Y')$ défini par la relation $F_\beta(u')(\beta) = u'(\beta)$. Ces données forment un polyfoncteur covariant de $\mathscr{C}'$ à $\mathscr{C}$.

Exemple 2. Soit $\mathscr{C}' = Ab$ et soit $\mathscr{C}$ la catégorie des p groupes abéliens relativement à tout les nombres primes, plus le groupe nul.

Le foncteur $F^*: \mathscr{C}'^0 \to \text{Ens}$ est défini ainsi: si $\mathscr{A}' \in |\mathscr{C}'|$ alors $F^*(\mathscr{A}')$ est l'ensemble p-groupes quotients de $\mathscr{A}'$ plus le groupe nul; soit $u' \in \in (\mathscr{C}'(X', Y')$ et soit (Q, p') un groupe quotient de Y' et soit $\mathscr{J} = \ker(p' \cdot u')$ et soit $(X'/\mathscr{J}, \Psi)$ le groupe quotient de X', alors $F^*(u'): F^*(Y') \to F^*(X')$ est le morphisme défini par la relation $F^*(u')(Q) = X'/\mathscr{J}$.

Pour tout $A' \in |\mathscr{C}'|$ on prend $(F_\alpha(\mathscr{A}))_{\alpha \in F^*(\mathscr{A}')}$ la famille des p-groupes, quotient de $\mathscr{A}'$ plus le groupe nul et pour la famille on prend l'application identique.

A l'élément $(Q, u') \in F^*(Y') \times \mathscr{C}'(X', Y')$ on associe l'unique morphisme $F_{Q'}(u'): F_{F^*(u')(Q)}(X') \to F_Q(Y')$ du groupe quotient $X'/\mathscr{J} = F^*(u')(Q)$ au groupe quotient Q qui vérifie la relation $F_Q(u')\Psi = p'u'$. Ces données forment un polyfoncteur contravariant de $\mathscr{C}'$ à $\mathscr{C}$.

Soit $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}'$, $\mathscr{C}''$ trois catégories et soit $F: \mathscr{C}' \to \mathscr{C}$ et $G: \mathscr{C}'' \to \mathscr{C}'$ deux polyfoncteurs contravariants.

Définition 2. Le polyfoncteur composé des polyfoncteurs F et G designé par $H = F \cdot G$ est le polyfoncteur contravariant: $\mathscr{C}'' \to \mathscr{C}$ défini ainsi:

Le foncteur $H^*: \mathscr{C}''^0 \to \text{Ens}$ est défini pour les objets par $H^*(X'') = \\ = \bigcup_{\alpha \in G^*(X'')} F^*(G_\alpha(X''))$ (réunion disjointe) quelque soit $X'' \in |\mathscr{C}''|$. Si $\beta \in \\ \in H^*(X'')$ alors il y a $\alpha \in G^*(X'')$ unique déterminé tel que $\beta \in F^*(G_\alpha(X''))$; on prend $H_\beta(X'') = F_\beta(G_\alpha(X''))$. Soit $u'' \in \mathscr{C}''(X'', Y'')$; l'application désignée par $H^*(u'')$: $\bigcup_{\gamma \in G^*(Y'')} F^*(G_\gamma(Y'') \to \bigcup_{\alpha \in G^*(X'')} F_*(G_\alpha(X''))$ est définie ainsi:

Soit $\delta \in \bigcup_{\gamma \in G^*(Y'')} F^*(G_\gamma(Y''))$; alors il y a $\gamma \in G^*(Y'')$ unique déterminé tel que $\delta \in F^*(G_\gamma(Y''))$.

A l'élément (γ, u'') correspond le morphisme de $\mathscr{C}'$, $G_\gamma(u'')$: $G_{G^*(u'')(\gamma)}(X'') \to G_\gamma(Y'')$ et par le foncteur F^* lui correspond le morphisme d'ensembles $F^*(G_\gamma(u''))$: $F^*(G_\gamma(Y'')) \to F^*(G_{G^*(u'')(\gamma)}(X'')$ alors on prend $H^*(u'')(\delta) = F^*(G_\gamma(u''))(\delta)$. A l'élément (δ, u'') on associe dans $\mathscr{C}$ le morphisme

$$H_\delta(u'') = F_\delta(G_\gamma(u'')) : H_{H^*(u'')(\delta)} \cdot (X'') =$$

$$= F_{F^*(G_\gamma(u'')(\delta))}(G_{G^*(u'')(\gamma)}(X'') \to F_\delta(G_\gamma(Y'')) = H_\delta(Y''). \qquad (1)$$

Proposition 1. $H = F \cdot G$ est un polyfoncteur (contravariant).

Demonstration. D'abord on va montrer que $H \cdot \mathscr{C}''^0 \to \mathrm{Ens}$ est un foncteur.

Etant donné dans $\mathscr{C}''$ le diagramme $X'' \xrightarrow{u''} Y'' \xrightarrow{v''} Z''$, on va montrer que dans Ens le diagramme suivant est commutatif.

$$\begin{array}{ccc} H(Z'') = \bigcup\limits_{\varepsilon \in G^*(Z'')} F^*(G_\varepsilon(Z'')) & \xrightarrow{H^*(v'')} & \bigcup\limits_{\gamma \in G^*(Y'')} F^*(G_\gamma(Y'')) = H^*(Y'') \\ & \searrow^{H^*(v''\cdot u'')} & \downarrow H^*(u'') \\ & & \bigcup\limits_{\alpha \in G^*(X'')} F^*(G_\alpha(X'')) = H^*(X'') \end{array}$$

Soit $x \in H^*(Z'')$; si $x \in F^*(G_\varepsilon(Z''))$ où $\varepsilon \in G^*(Z'')$ alors on considère le morphisme $v' = G_\varepsilon(v'')$ et la fonction $F^*(v') : F^*(G_\varepsilon(Z'')) \to F^*(G_{G^*(v'')(\varepsilon)}(Y''))$; on a l'égalité $H^*(v'')(x) = F^*(v')(x) \in F^*(G_{G^*(v'')(\varepsilon)}(Y''))$.

Pour le calcul de $H^*(u'') \cdot H^*(v'')(x)$ on prend le morphisme $G_{G^*(v'')(\varepsilon)}(u'') = u' : G_{G^*(u'')G^*(v'')(\varepsilon)}(X'') \to G_{G^*(v'')(\varepsilon)}(Y'')$ et on considère le morphisme $F^*(u') : F^*(G_{G^*(v'')(\varepsilon)}(Y'')) \to F^*(G_{G^*(v''\cdot u'')(\varepsilon)}(X''))$ et on obtient les relations :

$$H^*(u'')H^*(v'')(x) = F^*(u')H^*(v'')(x) = F^*(u')F^*(v')(x) = F^*(v'u')(x).$$

Pour le calcul de $H^*(v'' \cdot u'')(x)$ on considère le morphisme $\bar{u} = G_\varepsilon(v'' \cdot u'') : G_{G^*(v''\cdot u'')(x)}(X'') \to G_\varepsilon(Z'')$ et on obtient l'application $F^*(\bar{u}) : F^*(G_\varepsilon(Z'')) \to F^*(G_{G^*(v''\cdot u'')(\varepsilon)}(X''))$ qui vérifie la relation $H^*(v'' \cdot u'')(x) = F^*(G_\varepsilon(v'' \cdot u''))(x)$.

Parce que G est un polyfoncteur on a l'égalité $G_\varepsilon(v'' \cdot u'') = G_\varepsilon(v'') \cdot G_{G^*(v'')(\varepsilon)}(u'') = v' \cdot u'$ et par conséquant $H^*(v'' \cdot u'')(x) = F^*(v' \cdot u')(x) = (H^*(u'') \cdot H^*(v''))(x)$, d'où il résulte l'égalité $H^*(v'' \cdot u'') = H^*(u'')H^*(v'')$. On va montrer que $H^*(1_{X''}) = 1_{H^*(X'')}$ pour tout $X'' \in |\mathscr{C}''|$. Pour le calcul de $H^*(1_{X''}) : \bigcup\limits_{\alpha \in G^*(X'')} F^*(G_\alpha(X'')) \to \bigcup\limits_{\alpha \in G^*(X'')} F^*(G_\alpha(X''))$ on calcule $H^*(1_{X''})(\beta)$ avec $\beta \in \bigcup\limits_{\alpha \in G^*(X'')} F^*(G_\alpha(X''))$. Si $\beta \in F^*(G_\alpha(X''))$ alors on considère le morphisme $G_\alpha(1_{X''}) : G_\alpha(X'') \to G_\alpha(X'')$ qui est égal à $1_{G_\alpha(X'')}$; puis on prend la fonction $F^*(1_{G_\alpha(X'')}) = 1_{F^*(G_\alpha(X''))}$; par définition on a $H^*(1_{X''})(\beta) = F^*(1_{G_\alpha(X'')})(\beta) = \beta$, donc H^* est un foncteur.

Il faut vérifier la condition (i) de la définition 1, c'est-à-dire il faut montrer la commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} H_{H^*(v''\cdot u'')(x)}(X'') & \xrightarrow{H_{H^*(v'')(x)}(u'')} & H_{H^*(v'')(x)}(Y'') \\ & \searrow^{H_x(v''\cdot u'')} & \downarrow H_x(v'') \\ & & H_x(Z'') \end{array}$$

De la relation (1) on a l'égalité $H_x(v'' \cdot u'') = F_x(G_\varepsilon(v'' \cdot u''))$ parce que $x \in F^*(G_\varepsilon(Z''))$.

$$H_x(v'')H_{H^*(v'')(x)}(u'') = F_x(G_\varepsilon(v'')) \cdot F_{H^*(v'')(x)}(G_{G^*(v'')(\varepsilon)}(u''))$$

parce que $H^*(v'')(x) \in F(G_{G^*(v'')(\varepsilon)}(Y''))$.

On a aussi les relations

$$G_\varepsilon(v'' \cdot u'') = G_\varepsilon(v'') \cdot G_{G^*(v'')(\varepsilon)}(u'') = v'u' \text{ et } F_x(G_\varepsilon(v'' \cdot u'')) =$$

$$= F_x(v' \cdot u') = F_x(v') \cdot F_{F^*(v')(\iota)}(u') = F_x(G_\varepsilon(v'')) \cdot F_{H^*(v'')(x)}(G_{G^*(v'')(\varepsilon)}(u''))$$

ce qui montre que H vérifie la condition (i).

Pour vérifier la condition (ii) de la définition 1 il faut montrer que $H_\beta(1_{X''}) = 1_{H\beta(X'')}$. De la relation 1 on a $H_\beta(1_{X''}) = F_\beta(G_\alpha(1_{X''})) = F_\beta(1_{G_\alpha(X'')}) = 1_{F\beta(G_\alpha(X''))}$ où $\beta \in F^*(G_\alpha(X''))$, ce qui montre que H satisfait aussi la condition (ii).

Proposition 2. Soit $F : \mathscr{C}' \to \mathscr{C}$ un polyfoncteur et soit $1_{\mathscr{C}'} : \mathscr{C}' \to \mathscr{C}'$ le foncteur identique considéré comme polyfoncteur. Alors $F \cdot 1_{\mathscr{C}'} = 1_{\mathscr{C}'} : F = F$.

Démonstration. Nous allons considérer les polyfoncteurs contravariants et nous allons montrer que $F \cdot 1_{\mathscr{C}'} = F$, l'autre égalité peut être démontré de la même manière.

Si $X' \in |\mathscr{C}'|$, alors on a $(F \cdot 1_{\mathscr{C}'})^*(X') = \bigcup_{\alpha \in 1^*_{C'}(X')} (F^*(1_{\mathscr{C}'})_\alpha X') = F^*(X')$ parce que $1^*_{\mathscr{C}'}(X')$ est formé d'un seul élément α.

Soit $u' \in \mathscr{C}'(X', Y')$ et soit $\delta \in (F \cdot 1_{\mathscr{C}'})^*(Y')$; on a le morphisme $(1_{C'})_\gamma(u') : (1_{C'})_\alpha(X') \to (1_{C'})_\gamma(Y')$, où α, γ sont l'unique élément de $(1^*_{C'})(X')$ respectivement $(1^*_{C'})(Y')$; mais $(1^*_{C'})(u') = u'$ et on considère l'application $F^*(u') : F^*(Y') \to F^*(X')$ et on a $(F \cdot 1_{C'})^*(u')(\delta) = F^*(u')(\delta)$, donc $(F \cdot 1_{C'})^* = F^*$. Parce que $\beta \in (F \cdot 1_{C'})^*(X')$, alors $(F \cdot 1_{C'})_\beta(X') = F_\beta((1_{C'})_\alpha X') = F_\beta(X')$.

Pour $\delta \in (F \cdot 1_{C'})(Y')$ on a $(F \cdot 1_{C'})_\delta(u') = F_\delta((1_{C'})_\gamma(u')) = F_\delta(u)$, donc $F \cdot 1_{C'} = F$.

Proposition 3. Soit $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}'$, $\mathscr{C}''$, $\mathscr{C}'''$ quatre catégories et soit $\mathscr{C}''' \xrightarrow{H} \mathscr{C}'' \xrightarrow{G} \mathscr{C}' \xrightarrow{F} \mathscr{C}$ trois polyfoncteurs contravariants. Alors on a l'égalité $(F \cdot G) \cdot H = F \cdot (G \cdot H)$.

Démonstration. On désigne par $F \cdot G = P$, $P \cdot H = Q$, $G \cdot H = R$ et $F \cdot R = S$ et nous allons montrer que $S = Q$.

Soit $X'' \in |\mathscr{C}''|$; on a l'égalité $P^*(X'') = \bigcup_{\beta \in G^*(X'')} F^*(G_\beta(X''))$. Pour tout $X''' \in |\mathscr{C}'''|$ on a $Q^*(X''') = \bigcup_{\gamma \in H^*(X''')} P^*(H_\gamma(X''')) = \bigcup_{\gamma \in H^*(X''')} \bigcup_{\beta \in G^*(H_\gamma(X'''))} F^*(G_\beta(H_\gamma(X')))$ puis $R^*(X''') = \bigcup_{\gamma \in H^*(X''')} G^*(H_\gamma(X'''))$ et $S(X''') = \bigcup_{\gamma \in R^*(X''')} F^*(R_\gamma(X''')) =$ $= \bigcup_{\gamma \in H^*(X''')} \bigcup_{\beta \in G^*(H_\gamma(X'''))} F^*(R_\beta(X''')) = \bigcup_{\gamma \in H^*(X''')} \bigcup_{\beta \in G^*(H_\gamma(X'''))} F^*(G_\beta(H_\gamma(X'''))$ et donc $Q^*(X''') = S^*(X''')$.

Maintenant nous montrerons que les foncteurs Q^* et S^* coïncident aussi sur les morphismes.

Soit $u''' \in \mathscr{C}'''(X''', \mathbf{Y}''')$; pour calculer l'application

$$Q^*(u''') : \bigcup_{\eta \in H^*(Y''')} P^*(H_\eta(\mathbf{Y}''')) \to \bigcup_{\gamma \in H^*(X''')} P^*(H_\gamma(X'''))$$

on procède ainsi : si $\varepsilon \in \bigcup_{\eta \in H^*(Y''')} P^*(H_\eta(Y'''))$ alors il y a un seul $\eta \in H^*(Y''')$ ayant la propriété $\varepsilon \in P^*(H_\eta(Y'''))$; puis on prend le morphisme $H_\eta(u''') : H_{H^*(u''')(\eta)}(X''') \to H_\eta(Y''')$ et l'application $P^*(H_\eta(u''')) : P^*(H_\eta(Y''')) \to P^*(H_{H^*(u''')(\eta)}(X'''))$ et il y a l'égalité $Q^*(u''')(\varepsilon) = P^*(H_\eta(u'''))(\varepsilon)$. Pour le calcul de $P^*(H_\eta(u'''))(\varepsilon)$ on procède d'une manière analogue : on a $\varepsilon \in P^*(H_\eta(Y''')) = \bigcup_{\xi \in G^*(H_\eta(Y'''))} F^*(G_\xi(H_\eta(\mathbf{Y}'''))$ et si $\varepsilon \in F^*(G_\xi(H_\eta(\mathbf{Y}'''))$ où $\xi \in G^*(H_\eta(\mathbf{Y}'''))$ alors on considère le morphisme

$$G_\xi(H_\eta(u''')) : G_{G^*(H_\eta(u'''))(\xi)}(H_{H^*(u''')(\eta)}(X''')) \to G_\xi(H_\eta(\mathbf{Y}'''))$$

et on prend l'application

$$F^*(G_\xi(H_\eta(u''')) : F^*(G_\xi(H_\eta(\mathbf{Y}''')) \to F^*(G_{G^*(H_\eta(u'''))(\xi)}(G_{G^*(u''')(\eta)}(X'''))$$

et alors on a l'égalité

$$Q^*(u''')(\varepsilon) = P^*(H_\eta(u'''))(\varepsilon) = F^*(G_\xi(H_\eta(u'''))(\varepsilon). \qquad (2)$$

On procède de la même manière pour le calcul de

$$S^*(u''') : \bigcup_{\eta \in R^*(Y''')} F^*(R_\eta(Y''')) \to \bigcup_{\gamma \in R^*(X''')} (F^*(R_\gamma(X''')).$$

Mais on a

$$S^*(Y''') = \bigcup_{\eta \in R^*(Y''')} F^*(R_\eta(Y''')) = \bigcup_{\eta \in H^*(Y''')} \bigcup_{\xi \in G^*(H_\eta(Y'''))} F^*(G_\xi(H_\eta(\mathbf{Y}'''))$$

et en tenant compte des relations $\varepsilon \in F^*(G_\xi(H_\eta(Y'''))$ où $\xi \in G^*(H_\eta(Y''))$, $R_\xi(Y''') = G_\xi(H_\eta(\mathbf{Y}'''))$ et du fait que la réunion est disjointe résulte que $\varepsilon \in F^*(R_\xi(\mathbf{Y}'''))$.

Pour le calcul de $S^*(u''')(\varepsilon)$ d'abord on considère le morphisme $R_\xi(u''') : R_{R^*(u''')(\xi}(X''') \to R_\xi(\mathbf{Y}''')$ et puis l'application $F^*(R_\xi(u''')) : F^*(R_\xi(Y''')) \to F^*(R_{R^*(u''')(\xi)}(X''')$. Par définition on a $S^*(u''')(\varepsilon) = F^*(R_\xi(u'''))(\varepsilon)$, mais $R_\xi(u''') = G_\xi(H_\eta(u'''))$ parce que $\xi \in G^*(H_\eta(Y'''))$.

Donc conformément à la relation (2) $S^*(u''')(\varepsilon) = F^*(R_\xi(u'''))(\varepsilon) = F^*(G_\xi(H_\eta(u''')))(\varepsilon) = Q^*(u''')(\varepsilon)$.

Soit $\alpha \in Q^*(X''')$; si $\alpha \in P^*(H_\gamma(X'''))$ où $\gamma \in H^*(X''')$ alors $Q_\alpha(X''') = P_\alpha(H_\gamma(X'''))$; si $\alpha \in F^*(G_\beta(H_\gamma(X'''))$ alors $P_\alpha(H_\gamma(X''')) = F_\alpha(G_\beta(H_\gamma(X'''))$ et donc $Q_\alpha(X''') = F_\alpha(G_\beta(H_\gamma(X''')))$.

Mais on a la relation $\alpha \in F^*(G_\beta(H_\gamma(X''))) = F^*(R_\beta(X'''))$ parce que $\beta \in G^*(H_\gamma(X'''))$ et donc il y a l'égalité $\mathscr{S}_\alpha(X''') = F_\alpha(R_\beta(X''')) = F_\alpha(G_\beta(H_\gamma(X''))) = Q_\alpha(X''')$.

On a $Q_\varepsilon(u''') = P_\varepsilon(H_\eta(u'''))$ parce que $\varepsilon \in P^*(H_\eta(Y'''))$, $\eta \in H^*(Y''')$ et $P_\varepsilon(H_\eta(u''')) = F_\varepsilon(G_\xi(H_\eta(u''')))$ parce que $\varepsilon \in F^*(G_\xi(H_\eta(Y''')))$ et $\xi \in G^*(H_\eta(Y'''))$. D'autre part $S_\varepsilon(u''') = F_\varepsilon(R_\xi(u'''))$ parce que $\varepsilon \in F^*(R_\xi(\mathbf{Y}'''))$. Mais $R_\xi(u''') = G_\xi(H_\eta(u'''))$ parce que $\xi \in G^*(H_\eta(\mathbf{Y}'''))$.

Donc $S_\varepsilon(u''') = F_\varepsilon(R_\xi(u''')) = F_\varepsilon(G_\xi(H_\eta(u''''))) = Q_\varepsilon(u''')$ et la proposition a été demontrée.

Définition 3. Soit $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ deux catégories et soit $F, G : \mathscr{C}' \to \mathscr{C}$ deux polyfoncteurs contravariants; un morphisme de polyfoncteurs contravariants $\Phi : G \to F$ est composés par les données suivantes : un morphisme fonctoriel $\Phi^* : F^* \to G^*$ et pour chaque $X' \in |\mathscr{C}'|$ et $\alpha \in F^*(X')$ on donne dans $\mathscr{C}$ un morphisme $\Phi_\alpha(X') : G_{\Phi^*(X')(\alpha)}(X') \to F_\alpha(X')$. Ces données satisfont la condition suivante :

(i) Quelque soit l'élément $(\beta, u') \in F^*(Y') \times \mathscr{C}'(X', Y')$ le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} G_{G^*(u')\Phi^*(Y')(\beta)}(X') = G_{\Phi^*(X')(F^*(u'))(\beta)}(X') & \xrightarrow{G_{\Phi^*(Y')(\beta)}(u')} & G_{\Phi^*(Y')(\beta)}(Y') \\ \downarrow \Phi_{F^*(u')(\beta)}(X') & & \downarrow \Phi_\beta(Y') \\ F_{F^*(u')(\beta)}(X') & \xrightarrow{F_\beta(u')} & F_\beta(Y') \end{array}$$

Le morphisme de polyfoncteurs covariants $\Phi : G \to F$ diffère de celui-ci par le fait qu'on donne le morphisme fonctoriel $\Phi^* : G^* \to F^*$ et pour tout $X' \in |\mathscr{C}'|$ et $\gamma \in G^*(X')$ on donne dans $\mathscr{C}$ un morphisme $\Phi_\gamma(X') : G_\gamma(X') \to F_{\Phi^*(X')(\gamma)}(X')$ avec une condition similaire de commutativité du diagramme comme dans le cas des polyfoncteurs contravariants.

Définition 4. Soit $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ deux catégories et soit $F, G, H : \mathscr{C}' \to \mathscr{C}$ trois polyfoncteurs contravariants; soit $\Psi : H \to G$, $\Phi : G \to F$ des morphismes de polyfoncteurs. Le morphisme composé $\theta = \Phi \cdot \Psi : H \to F$ de Φ et Ψ est défini ainsi :

Comme morphisme fonctoriel de F^* à H^* on prend le morphisme fonctoriel $\theta^* = \Psi^* \cdot \Phi^*$.

Soit $X' \in |\mathscr{C}'|$ et soit $\alpha \in F^*(X')$; dans ces conditions il y a dans $\mathscr{C}$ un morphisme $\Phi_\alpha(X') : G_{\Phi^*(X')(\alpha)}(X') \to F_\alpha(X')$, étant obtenu l'élément $\Phi^*(X')(\alpha) \in G^*(X')$, on obtient un morphisme

$$\Psi_{\Phi^*(X')(\alpha)}(X') : H_{\Psi^*(X')(\Phi^*(X')(\alpha))}(X') \to G_{\Phi^*(X')(\alpha)}(X').$$

Par définition on prend le morphisme de $\mathscr{C}$, $\theta_\alpha(X')$ le morphisme composé des morphismes $\Phi_\alpha(X')$ et $\Psi_{\Phi^*(X')(\alpha)}(X')$, c'est-à-dire $\theta_\alpha(X') = \Phi_\alpha(X') \cdot \Psi_{\Phi^*(X')(\alpha)}(X') : H_{\Psi^*(X')\Phi^*(X')(\alpha)}(X') \to F_\alpha(X')$.

Il faut montrer que la condition (i) de la définition 3 est accomplie. Soit $(\beta, u') \in F^*(Y') \times \mathscr{C}'(X', Y')$, alors le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} F_{F^*(u')(\beta)}(X') & \xrightarrow{F_\beta(u')} & F_\beta(Y') \\ \uparrow \Phi_{F^*(u')(\beta)}(X') & & \uparrow \Phi_\beta(Y') \\ G_{G^*(u')\Phi^*(Y')(\beta)}(X') = G_{\Phi^*(X')F^*(u')(\beta)}(X') & \xrightarrow{G_{\Phi^*(Y')(\beta)}(u')} & G_{\Phi^*(Y')(\beta)}(Y') \\ \uparrow \Psi_{\Phi^*(X')F^*(u')(\beta)}(X') & & \uparrow \Psi_{\Phi^*(Y')(\beta)}(Y') \\ H_{H^*(u')\Psi^*(Y')\Phi^*(Y')(\beta)}(X') = H_{\Psi^*(X')\Phi^*(X')F^*(u')(\beta)}(X') & \xrightarrow{H_{\Psi^*(Y')\Phi^*(Y')(\beta)}(u')} & H_{\Psi^*(Y')\Phi^*(Y')(\beta)}(Y') \end{array}$$

On résulte aussi que l'extérieur du diagramme tout entier commute donc θ est un morphisme de polyfoncteurs.

Proposition 4. Le composé des morphismes de polyfoncteurs est associatif.

La démonstration est laissée au lecteur.

Soit $F : \mathscr{C}' \to \mathscr{C}$ un polyfoncteur contravariant, alors $1_F : F \to F$ est le morphisme de polyfoncteurs défini ainsi : on prend le morphisme fonctoriel identique de F^* et si $X' \in |\mathscr{C}'|$ et $\alpha \in F^*(X')$ on prend le morphisme $(1_F)_\alpha(X') : F_\alpha(X') \to F_\alpha(X')$ comme étant le morphisme $1_{F_\alpha(X')}$.

Le morphisme 1_F de polyfoncteurs sera appellé le morphisme identique de F et sera désigné par 1_F.

Proposition 5. Soit $F, G : \mathscr{C}' \to \mathscr{C}$ deux polyfoncteurs (contravariants) et soit $\Phi : G \to F$ un morphisme de polyfoncteurs. Alors on a l'égalité $1_F \cdot \Phi = \Phi$ et $\Phi \cdot 1_G = \Phi$.

La démonstration est laissée au lecteur.

BIBLIOGRAPHIE

1. *I. Bucur, A. Deleanu*, Introduction to the theory of categories and functors. London 1968.
2. *F. Ulmer*, Journal of Algebra, 8, 1968.
3. *S. Mac Lone*, Categories for the working mathematician. Springer-Verlag 1971.

Polifunctori (I)

În această lucrare se extind noţiunile de functor, compunere de functori, functorial, iar proprietăţile enunţate devin în mod natural generalizări ale celor cunoscute în cadrul functorilor.

C.Z.: 515.1

ON BINARY NON-HOMOGENEOUS RELATIONS IN A CATEGORY (1)

M. REBENCIUC*

In this part of the paper the relations and the operations which are usually in Set (the category of sets) are defined on the set of binary non-homogeneous relations in a wellpowered and wellcopowered category with products, coproducts and triangular decomposition and in particular in a topoi. This background assures the existence of about all operations. Two propositions relating to some of these relations and operations are given. Finally (which is the purpose of this part of the paper) it proves that the majority of connection properties between inversion and inclusion, (finite) intersection, (finite) union, composition and taking of complement are well preserved.

1. Prerequisites

The following observations lead us to the background of this paper.

Observation 1.1. The following are equivalent for a category $\mathscr{C}$:
1) $\mathscr{C}$ is (finitely) complete;
2) $\mathscr{C}$ has (finite) products and fibered products [2].

Observation 1. 2. The following are equivalent for a category $\mathscr{C}$:
1) $\mathscr{C}$ is (finitely) cocomplete;
2) $\mathscr{C}$ has (finite) coproducts and fibered coproducts [2].

Observation 1.3. The following are equivalent for a category $\mathscr{C}$:
1) $\mathscr{C}$ has products and finite intersections;
2) $\mathscr{C}$ has products and intersections;
3) $\mathscr{C}$ is complete [2].

Observation 1.4. The following are equivalent for a wellpowered and wellcopowered category $\mathscr{C}$ (the class of all subjects, respectively quotient objects of every object is a set) with products and coproducts:
1) $\mathscr{C}$ is complete;
2) $\mathscr{C}$ is cocomplete;
3) $\mathscr{C}$ is a category with triangular decomposition [2].

Observation 1.5. A wellpowered complete category $\mathscr{C}$ is a category with images (even with minimal triangular decomposition) [2].

Observation 1.6. From above observations it follows that a wellpowered and wellcopowered category $\mathscr{C}$ with products, coproducts and triangular decomposition (finite intersections) has intersection, images (even minimal triangular decomposition), fibered products and fibered coproducts ($\mathscr{C}$ is complete and cocomplete).

* Assist., Mathematics Dept.

Definition 1.7. A topoi $\mathscr{E}$ is a cartesian category, (1) finitely complete and 2) cartesian closed) with a subobject classifier (3).

The properties 1), 2)-finite variant from Observation 1.1. and 1') $\mathscr{E}$ has fibered products and a final object $\mathbf{1}$ are equivalent [5].

2) refers to the cartesian adjunction $(\ )xA \dashv (\ )^A$, that is for any $A \in |\mathscr{E}|$, the functor $(\ )xA : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ has a coadjoint, denoted $(\ )^A$.

3) refers to the fact that there is a monomorphism $v : \mathbf{1} \hookrightarrow \Omega$, so that for any monomorphism $m : X' \hookrightarrow X$ in $\mathscr{E}$ there is an unique morphism $\varphi_m : X \to \Omega$ (named the characteristic morphism of m) making

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{\omega_{X'}} & \\ {\scriptstyle m}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle v} \\ X & \xrightarrow{\varphi_m} & \Omega \end{array}$$

a fibered product (with $\omega_{X'} : X' \to \mathbf{1}$ the unique morphism).

Observation 1.8. A topoi $\mathscr{E}$ has an initial object O, and for any object X the morphisms of the sets $\mathscr{E}(\mathbf{1}, X)$, $\mathscr{E}(\mathrm{O}, X)$ are monomorphisms [5].

Observation 1.9. In a topoi $\mathscr{E}$ there exists the morphisms the binary homogeneous operations[5,6]) $\wedge : \Omega \times \Omega \to \Omega$, $\vee : \Omega \times \Omega \to \Omega$, $\to : \Omega \times \Omega \to \Omega$ such that Ω is an object representable Heyting algebra.

Since the assignment $m \to \varphi_m$ (from property 3) of Definition 1.7.) defines a bijection between $\mathrm{Sub}(X)$, the set of all subobject of X ($\mathscr{E}$ is a wellpowered category[5]) and $\mathscr{E}(X, \Omega)$, it follows that $\mathrm{Sub}(X)$ is a Heyting algebra with the smallest element $\alpha_X \in \mathscr{E}(\mathrm{O}, X)$ (the unique monomorphism), the greatest element $1_X \in \mathscr{E}(X, X)$ and the complement $\neg X'$ of the subject $X' \in \mathrm{Sub}(X)$. In addition the topoi $\mathscr{E}$ has finite intersections, finite unions, images and unique triangular decomposition ($\mathscr{E}$ is a balanced category) [5].

Observation 1.10. In a topoi $\mathscr{E}$ for any morphism $f : X \to Y$ one can define the covariant functor named inverse image associated with f, $f^{-1} : \mathrm{Sub}(Y) \to \mathrm{Sub}(X)$ where $\mathrm{Sub}(X)$ is the category associated with the poset $(\mathrm{Sub}(X), \leqslant)$ and f^{-1} is the application which associates every subobject Y' of Y with the subobject $f^{-1}(Y')$ of X given by the fibered product

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}(Y') & \longrightarrow & Y' \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{f} & Y. \end{array}$$

Observation 1.11. Set, the category of sets is a topoi, where $\mathbf{1} = \{*\}$ (the singleton set), $B^A = \mathrm{Set}(A, B)$, the adjunction $e_{A,B} : B^A \times A \to B$ is given by $e_{A,B}(f, x) = f(x)$ for all $f \in B^A$, $x \in A$, $\Omega = \{0, 1\}$, the subobject classifier $v : \mathbf{1} \to \Omega$ is given by $v(*) = 1$ (and if $X' \subseteq X$, then $\varphi_{X'} : X \to \Omega$ is the characteristic function of X'.

2. Relations and Operations on the Set of Binary Non-Homogeneous Relations in a Category

The relations and the operations which are usually in Set are defined on the set of binary non-homogeneous relations in the stated background in the previous section — a wellpowered and wellcopowered category $\mathscr{C}$ with products, coproducts and triangular decomposition and in particular a topoi $\mathscr{E}$ — with the observation that only the composition and the inversion depend on arity [6].

It will be denoted by $\mathrm{Rel}(A, B)$ the set of binary non-homogeneous relations on A, B (from A to B), where A, B are objects of $\mathscr{C}$ or $\mathscr{E}$. An element of $\mathrm{Rel}(A, B)$ will be indicated by the equivalent forms :

1) a subobject $r : R \hookrightarrow A \times B$ of the finite product $A \times B$;

2) two morphisms $r_A : R \to A, r_B : R \to B$, so that the morphism induced by the set $\{r_A, r_B\}$, $\langle r_A, r_B \rangle : R \to A \times B$ (the unique morphism in $\mathscr{C}(R, A \times B)$ or $\mathscr{E}(R, A \times B)$ such that $p_1 \langle r_A, r_B \rangle = r_A, p_2 \langle r_A, r_B \rangle = r_B$) is monomorphism [5].

In the following a wellpowered and wellcopowered category $\mathscr{C}$ with products, coproducts and triangular decomposition will be considered and the operations and the properties which are applicable only in a topoi $\mathscr{E}$ will be specified.

Definition 2.1. A relation $r_1 \in \mathrm{Rel}(A, B)$ is contained (included) in a relation $r_2 \in \mathrm{Rel}(A, B)$, $r_1 \subseteq r_2$ if the monomorphism r_1 factors through r_2.

Definition 2.2. Two relations $r_i \in \mathrm{Rel}\ (A, B)$, $i \in \{1, 2\}$ are equal, $r_1 = r_2$ if $r_1 \subseteq r_2$ and $r_2 \subseteq r_1$.

It has been found that if $r_i : R_i \hookrightarrow A \times B$, then $R_1 \simeq R_2 (R_1, R_2$ are the isomorphic objects of $\mathscr{C}$).

Definition 2.3. A relation $r \in \mathrm{Rel}(A, B)$ is called the intersection (finite intersection) of the set (finite set) of relations $\{r_i\} \subset \mathrm{Rel}(A, B)$ and is denoted by $\bigcap r_i$ if for each index i, $r \subseteq r_i$ and every morphism $f \in \mathscr{C}(X, A \times B)$ which factors through each r_i factors (necessarily in an unique way) through r.

Observation 2.4. Since $\mathscr{C}(\mathscr{E})$ has intersections (finite intersections), that is the intersection (finite intersection) exists for every set (finite set) of subobjects of each object of $\mathscr{C}(\mathscr{E})$, it follows (particularly) that every set (finite set) of binary non-homogeneous relations on two arbitrary objects of $\mathscr{C}(\mathscr{E})$ has an intersection (finite intersection).

Definition 2.5. Let $r_i \in \mathrm{Rel}(A_i, B_i)$, $r_i : R_i \hookrightarrow A_i \times B_i$, $i \in \{1, 2\}$ and $f \in \mathscr{C}(A_1 \times B_1, A_2 \times B_2)$ be relations, respectively a morphism (monomorphism). The relation r_1 is carried into (induced by) r_2 by the morphism (monomorphism) f, $r_1 \xrightarrow{f} r_2$ ($r_1 \overset{f}{\hookrightarrow} r_2$) with commutative diagram, respectively fibered product if there exists a morphism (monomorphism) $f' \in$

$\in \mathscr{C}(R_1, R_2)$ such that the diagram 1) (1')

$$1)\quad \begin{array}{ccc} R_1 & \xrightarrow{f'} & R_2 \\ {\scriptstyle r_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle r_2} \\ A_1\times B_1 & \xrightarrow{f} & A_2\times B_2 \end{array} \qquad 1')\quad \begin{array}{ccc} R_1 & \xhookrightarrow{f'} & R_2 \\ {\scriptstyle r_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle r_2} \\ A_1\times B_1 & \xhookrightarrow{f} & A_2\times B_2 \end{array}$$

is commutative, respectively fibered product.

The relation r_1 is carried into (induced by) r_2, $r_1 \to r_2$ ($r_1 \hookrightarrow r_2$) with commutative diagram, respectively fibered product if there is a morphism (monomorphism) $f \in \mathscr{C}(A_1\times B_1, A_2\times B_2)$ such that $r_1 \xrightarrow{f} r_2 (r_1 \xhookrightarrow{f} r_2)$ with commutative diagram, respectively fibered product.

Definition 2.6. A set (finite set) of relations $\{r_i\} \subset \mathrm{Rel}\ (A_1, B_1)$ is carried into (induced by) $r \in \mathrm{Rel}(A_2, B_2)$ (by the morphism (monomorphism)f), $\{r_i\} \to r$ ($\{r_i\} \hookrightarrow r$) ($\{r_i\} \xrightarrow{f} r$)($\{r_i\} \xhookrightarrow{f} r$)) if for each index i the relation r_i is carried into (induced by) r by the same morphism (monomorphism) (by the morphism (monomorphism)f) with commutative diagram.

Definition 2.7. A relation $r \in \mathrm{Rel}\ (A_1, B_1)$ is called the union (finite union) of the set (finite set) of relations $\{r_i\} \subset \mathrm{Rel}\ (A_1, B_1)$ and is denoted by $\cup r_i$ if has the following properties:

1) for each index i, $r_i \subseteq r$;

2) for any $f \in \mathscr{C}(A_1\times B_1, A_2\times B_2)$, if $\{r_i\} \xrightarrow{f} r'$ where $r' \in \mathrm{Rel}(A_2, B_2)$ then $r \xrightarrow{f} r'$.

Observation 2.8. If $\mathscr{C}$ has unions (finite unions), i.e. there exixts the union (finite union) for every set (finite set) of subobjects of each object of $\mathscr{C}$, then in particular every set (finite set) of binary nonhomogeneous relations on two arbitrary objects of $\mathscr{C}$ has an union (finite union).

A topoi $\mathscr{E}$ has finite unions (see Observation 1.9).

Definition 2.9. In a topoi $\mathscr{E}$ a relation of $\mathrm{Rel}\ (A, B)$ is called the complement of the relation $r \in \mathrm{Rel}\ (A, B)$, $r : R \hookrightarrow A\times B$ and is denoted by $\neg r : \neg R \hookrightarrow A\times B$ if $r \cap \neg r = \alpha_{A\times B}$, $r \cup \neg r = 1_{A\times B}$ with $\alpha_{A\times B}, 1_{A\times B} \in \in \mathrm{Rel}(A, B)$, $\alpha_{A\times B} : 0 \hookrightarrow A\times B$, $1_{A\times B} : A\times B \hookrightarrow A\times B$.

Definition 2.10. The composition (product, composite relation) of the binary non -homogeneous relations $r_i \in \mathrm{Rel}(A_i, A_{i+1})$, $r_i = \langle r^i_{A_i}, r^i_{A_{i+1}} \rangle : R_i \hookrightarrow A_i\times A_{i+1}$, $i \in \{1, 2\}$ is the binary relation $r_3 \in \mathrm{Rel}\ (A_1, A_3)$, denoted r_2 or r_1 and defined by $r_3 : \mathrm{Im}(R_3 \xrightarrow{\langle r^1_{A_1} u_1, r^2_{A_3} u_2\rangle} A_1 \times A_3) \hookrightarrow A_1 \times A_3$ making the square of the diagram

$$\begin{array}{ccccc} R_3 & \xrightarrow{u_2} & R_2 & \xrightarrow{r^2_{A_3}} & A_3 \\ {\scriptstyle u_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle r^2_{A_2}} & & \\ R_1 & \xrightarrow{r^1_{A_3}} & A_2 & & \\ {\scriptstyle r^1_{A_1}}\downarrow & & & & \\ A_1 & & & & \end{array}$$

cartesian.

Observation 2.11. In a topoi $\mathscr{E}$ one can consider the category Rel with the same objects as $\mathscr{E}$ and in which the set of morphisms $\mathrm{Rel}(A_1, A_2)$ is the set of relations from A_1 to A_2, since the composition of relations is associative and has the relation $\Delta_A = \langle 1_A, 1_A \rangle : A \hookrightarrow A \times A$ as identity of A [5].

Definition 2.12. The inverse of the relation $r \in \mathrm{Rel}(A, B)$, $r : R \hookrightarrow A \times B$ is a relation of $\mathrm{Rel}(B, A)$, denoted $r^{-1} : R^{-1} \hookrightarrow : B \times A$ (the objects R, R^{-1} coincide) and defined by the equality $r^{-1} = sr$, with $s = \langle p_2, p_1 \rangle : A \times B \hookrightarrow B \times A$ the isomorphism of symmetry.

Observation 2.13. Every binary non-homogeneous relation on two arbitrary objects of $\mathscr{C}$ is invertible and the inverse of the relation $r \in \mathrm{Rel}(A, B)$, $r : R \hookrightarrow A \times B$, $r = \langle r_A, r_B \rangle$ is the relation $r^{-1} \in \mathrm{Rel}(B, A)$, $r^{-1} : R^{-1} \hookrightarrow B \times A$, $r^{-1} = \langle r_B, r_A \rangle$.

3. Properties of the Relations $\rightarrow$, $\hookrightarrow$

Let $\mathscr{E}$ be a topoi.

Proposition 3.1. If a relation $r_1 \in \mathrm{Rel}(A_1, A_2)$ is carried into (induced by) $r_2 \in \mathrm{Rel}(B_1, B_2)$ with fibered product, then the complement $\neg r_1$ is carried into (induced by) the complement $\neg r_2$.

Proof. Let $r_1 \in \mathrm{Rel}(A_1, A_2)$, $r_1 : R_1 \hookrightarrow : A_1 \times A_2$, $r_2 \in \mathrm{Rel}(B_1, B_2)$, $r_2 : R_2 \hookrightarrow B_1 \times B_2$ be such that $r_1 \rightarrow r_2$ with fibered product. Thus, there is a morphism f so that $r_1 \xrightarrow{f} r_2$ with the following fibered product

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}(R_2) = R_1 & \longrightarrow & R_2 \\ {\scriptstyle r_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle r_2} \\ A_1 \times A_2 & \xrightarrow{f} & B_1 \times B_2. \end{array}$$

As a consequence of Observation 1.9. and Observation 1.10. it follows that f^{-1}, the functor inverse image associated with f is a homomorphism of Heyting algebras. Therefore the diagram

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}(\neg R_2) = \neg R_1 & \longrightarrow & \neg R_2 \\ {\scriptstyle \neg r_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \neg r_2} \\ A_1 \times A_2 & \xrightarrow{f} & B_1 \times B_2 \end{array}$$

is fibered product and $\neg r_1 \rightarrow \neg r_2$ with fibered product. Similarly it proves that if $r_1 \hookrightarrow r_2$, then $\neg r_1 \hookrightarrow \neg r_2$ (with fibered product).

Observation 3.2. The binary non-homogeneous relations above can be replaced by n-ary non-homogeneous relations [5,6].

Proposition 3.3. There exists a binary non-homogeneous relation r_2 (to an arbitrary fixed object B) so that every binary non-homogeneous relation r_1 (to the same object B) is carried into r_2 by an unique morphism with fibered product.

Proof. One can take r_2 the subobject having the characteristic morphism $e_{B,\Omega}$ (see Observation 1.9.), that is $r_2 \in \mathrm{Rel}(P(B), B)$, $r_2 : \in_B \hookrightarrow$ $\hookrightarrow P(B) \times B$, where $P : \mathscr{E}^{\circ} \to \mathscr{E}$ is the functor defined by

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & P(A) = \Omega^A \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle P(g)} \\ B & \longrightarrow & P(B) = \Omega^B, \end{array}$$

$P(g)$ being the unique morphism which makes the diagram

$$\begin{array}{ccc} P(A)\times A & \xrightarrow{e_{A,\Omega}} & \Omega \\ {\scriptstyle P(g)\times 1_A}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle e_{B,\Omega}} \\ P(B)\times A & \xrightarrow{1_{P(B)}\times g} & P(B)\times B \end{array}$$

commutative. Since $\mathscr{E}$ is a topoi, the map $\alpha_{A,B} : \mathscr{E}(A, P(B)) \to \mathrm{Rel}(A, B)$ which associates every morphism $f \in \mathscr{E}(A, P(B))$ with the relation $r_1 \in \mathrm{Rel}\ (A, B)$ defined by the fibered product

$$\begin{array}{ccc} R_1 & \longrightarrow & \in_B \\ {\scriptstyle r_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle r_2} \\ A\times B & \xrightarrow{f\times 1_B} & P(B)\times B \end{array}$$

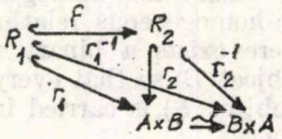
is a bijection [5]. Therefore for any relation $r_1 \in \mathrm{Rel}(A, B)$ there is an unique morphism $f\times 1_B$ such that r_1 is carried into r_2 by $f\times 1_B$.

Observation 3.4. For any $f \in \mathscr{E}(A\times B, P(B)\times B)$ the relations $\to$, $\xrightarrow{f}$ (with fibered product) on the sets $\mathrm{Rel}(A, B)$, $\{\in_B \hookrightarrow P(B) \times B\}$ are equal.

4. Properties of Inversion

Lemma 4.1. Let $r_i \in \mathrm{Rel}(A, B)$, $i \in \{1, 2\}$ be relations; if $r_1 \subseteq r_2$, then $r_1^{-1} \subseteq r_2^{-1}$.

Proof. We consider the relations $r_i : R_i \hookrightarrow A\times B$, $i \in \{1, 2\}$. From the diagram



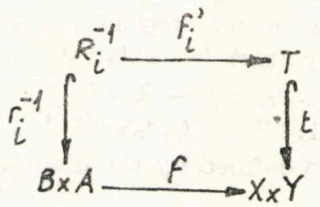
with the triangles commutative (except for that from above) obtained by the factorisation of the relation $r_1 \in \mathrm{Rel}\ (A, B)$ through $r_2 \in \mathrm{Rel}\ (A, B)$ and the expression of the inverse relations $r_i^{-1} \in \mathrm{Rel}\ (B, A)$, $i \in \{1, 2\}$ it follows the equalities $r_1^{-1} = sr_1 = sr_2 f = r_2^{-1} f$. Therefore the relation $r_1^{-1} \in \mathrm{Rel}(B, A)$ factors through $r_2^{-1} \in \mathrm{Rel}(B, A)$.

Theorem 4.2. For every set of relations $\{r_i\} \subset \mathrm{Rel}(A, B)$ there exists the equality $(\cap r_i)^{-1} = \cap\, r_i^{-1}$.

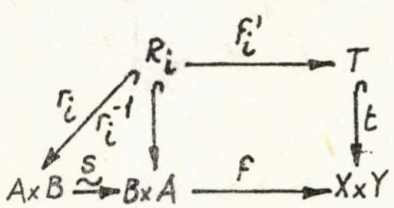
Proof. Let be $r_i : R_i \hookrightarrow A \times B$, $r_i^{-1} : R_i^{-1} \hookrightarrow B \times A$, where i belongs to a set (in particular finite). There exists the intesection $r = \cap r_i$, $r \in \in \mathrm{Rel}\ (A, B)$, $r : R \hookrightarrow A \times B$ and the inverse of r, the relation $r^{-1} \in \mathrm{Rel}(B, A)$, $r^{-1} : R^{-1} \hookrightarrow B \times A$ which is contained in every relation r_i^{-1}, since for each index i, $r \subseteq r_i$ and according to Lemma 4.1. If a morphism $f \in \in \mathscr{C}(X, B \times A)$ factors through each monomorphism $r_i^{-1} : R_i \hookrightarrow B \times A (R_i^{-1} = R_i)$, then from the equalities $f = r_i^{-1} f_i = sr_i f_i$ it follows that the morphism $s^{-1} f \in \mathscr{C}(X, A \times B)$ (with s^{-1} the inverse of the isomorphism of symmetry $s : A \times B \xrightarrow{\sim} B \times A$) factors through each monomorphism $r_i : R_i \hookrightarrow \hookrightarrow A \times B$, therefore and through the monomorphism $r : R \hookrightarrow A \times B$, that is $s^{-1} f = rf'$. Finally, using the expression of inverse we obtain the equalities $f = srf' = r^{-1} f'$, i.e. the morphism $f \in \mathscr{C}(X, B \times A)$ factors (uniquely, $f' \in \mathscr{C}(X, R)$ being given by the factorisation in unique way of the morphism $s^{-1} f \in \mathscr{C}(X, A \times B)$ through the monomorphism $r : R \hookrightarrow A \times B$) through the monomorphism $r^{-1} : R \hookrightarrow B \times A$. Thus the relation $r^{-1} \in \mathrm{Rel}(B, A)$ is the intersection (finite intersection) of the set (finite set) of relations $\{r_i^{-1}\} \subset \mathrm{Rel}(B, A)$.

Theorem 4.3. For every set (finite set) of relations $\{r_i\} \subset \mathrm{Rel}(A, B)$, if there exists the union (finite union) $\cup\, r_i$, then there exists the union (finite union) $\cup\, r_i^{-1}$ and the equality $(\cup\, r_i)^{-1} = \cup\, r_i^{-1}$.

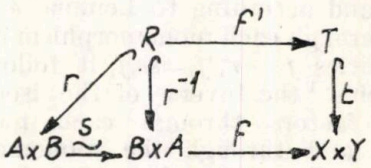
Proof. Let be $r_i : R_i \hookrightarrow A \times B$, $r_i^{-1} : R_i^{-1} \hookrightarrow B \times A$, where i belongs to a set (finite set). Suppose that the set (finite set) of relations $\{r_i^{-1}\} \subset \subset \mathrm{Rel}(B, A)$ is carried into the relation $t \in \mathrm{Rel}(X, Y)$, $\{r_i^{-1}\} \to t$, i.e. for each index i, the relation $r_i^{-1} \in \mathrm{Rel}(B, A)$ is carried into the relation $t \in \in \mathrm{Rel}(X, Y)$ by the same morphism $f \in \mathscr{C}(B \times A, X \times Y)$ with the commutative diagram



or, by the expression of r_i^{-1}, with the diagram



having the triangle and the square commutative. We obtain the equalities $tf_i' = fr_i^{-1} = fs\iota_i$, which means that for each index i, the relation $r_i \in \mathrm{Rel}(A, B)$ is carried into the relation $t \in \mathrm{Rel}(X, Y)$ by the same morphism $fs \in \mathscr{C}(A \times B, X \times Y)$ with commutative diagram. i.e. the set (finite set) of relations $\{r_i\} \subset \mathrm{Rel}(A, B)$ is carried into t, $\{r_i\} \to t$. From the existence of the union (finite union) $r = \cup\, r_i \in \mathrm{Rel}(A, B)$, $r : R \hookrightarrow A \times B$ it follows that the relation $r \in \mathrm{Rel}(A, B)$ is carried into t by the morphism $fs \in \mathscr{C}(A \times B, X \times Y)$ with the commutative diagram (the polygonal contour)



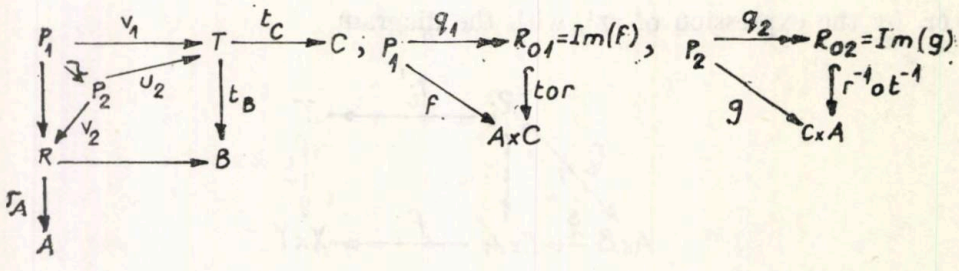
in which the commutative triangle is obtained by the expression of the relation $r^{-1} \in \mathrm{Rel}(B, A)$, It is easy to check that the square is commutative, that is the relation $r^{-1} \in \mathrm{Rel}(B, A)$ is carried into the relation $t \in \in \mathrm{Rel}(X, Y)$ by the morphism $f \in \mathscr{C}(B \times A, X \times Y)$ with commutative diagram. Since for each index i, $r_i \subseteq r$ and according to Lemma 4.1. it follows that the relation $r^{-1} \in \mathrm{Rel}(B, A)$ contains all of the relations r_i^{-1}. Therefore the relation $r^{-1} \in \mathrm{Rel}(B, A)$ is the union (finite union) of the set (finite set) of relations $\{r_i^{-1}\} \subset \mathrm{Rel}(B, A)$.

Proposition 4.4. For every relation $r \in \mathrm{Rel}(A, B)$ there exists the equality $(r^{-1})^{-1} = r$.

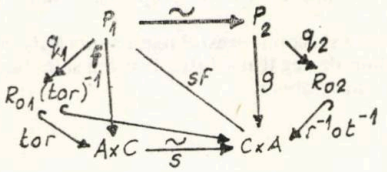
Proof. Succesively using the expression of the inverse (with s^{-1} the inverse of the isomorphism of symmetry $s : A \times B \simeq B \times A$) we obtain the equalities $r = (s^{-1}s)r = s^{-1}r^{-1} = (r^{-1})^{-1}$.

Theorem 4.5. For every relations $r \in \mathrm{Rel}(A, B)$, $t \in \mathrm{Rel}(B, C)$ there exists the equality $(\mathrm{tor})^{-1} = r^{-1}\,\mathrm{ot}^{-1}$.

Proof. Let $r = \langle r_A, r_B \rangle : R \hookrightarrow A \times B$, $t = \langle t_B, t_C \rangle : T \hookrightarrow B \times C$, $r^{-1} = \langle r_B, r_A \rangle : R^{-1} \hookrightarrow B \times A$, $t^{-1} = \langle t_C, t_B \rangle : T^{-1} \hookrightarrow C \times B$ be relations. The products tor, $r^{-1}\,\mathrm{ot}^{-1}$ are defined by the diagrams



with the squares cartesian and the two pairs of triangles commutative, given by the uniqueness (to an isomorphism $\theta : P_1 \to P_2$)of the fibered product of the angle $R \xrightarrow{r_B} B \xleftarrow{t_B} T$, respectively by the triangular decomposition of the morphisms $f = \langle r_A u_1, t_C v_1\rangle : P_1 \to A \times C$, $g = \langle t_C u_2, r_A v_2\rangle : P_2 \to C \times A$. From the expression of the inverse of the relation $\mathrm{tor} \in \mathrm{Rel}(A, C)$, $(\mathrm{tor})^{-1} = s(\mathrm{tor})$ with $s : A \times C \simeq C \times A$ the isomorphism of symmetry and by the equalities $sf = s\langle r_A u_1, t_C v_1\rangle = \langle t_C v_1, r_A u_1\rangle = \langle t_C u_2 \theta, r_A v_2 \theta\rangle = \langle t_C u_2, r_A v_2\rangle\theta$ it follows that in the diagram



all of the triangles are commutative (with $R_{01} = \mathrm{Im}(sf)$). From the equalities $sf = (\mathrm{tor})^{-1}q_1 = (r^{-1}\mathrm{o}t^{-1})q_2\theta$, $g = (r^{-1}\mathrm{o}t^{-1})q_2 = (\mathrm{tor})^{-1}q_1\theta^{-1}$ and by the definition of the image of the morphism $sf : P_1 \to C \times A$, respectively $g : P_2 \to C \times A$ it follows the equality of the relations $(\mathrm{tor})^{-1} \in \in \mathrm{Rel}(C, A)$, $r^{-1}\mathrm{o}t^{-1} \in \mathrm{Rel}(C, A)$.

Theorem 4.6. In a topoi $\mathcal{E}$ for every relation $r \in \mathrm{Rel}(A, B)$ there exists the equality $(\neg r)^{-1} = \neg(r^{-1})$.

Proof. According to Definition 2.9. the complement of the relation $r \in \mathrm{Rel}(A, B)$, $r : R \hookrightarrow A \times B$ is the relation $\neg r \in \mathrm{Rel}(A, B)$, $\neg r : \neg R \hookrightarrow \hookrightarrow A \times B$ defined by the equalities of relations $r \cap \neg r = \alpha_{A\times B}$, $r \cup \neg r = = 1_{A\times B}$, which inverted give, according to Theorem 4.2., Theorem 4.3. the equalities of relations $(r \cap \neg r)^{-1} = r^{-1} \cap (\neg r)^{-1} = s\alpha_{A\times B} = \alpha_{B\times A}$, $(r \cup \neg r)^{-1} = r^{-1} \cup (\neg r)^{-1} = s1_{A\times B} = s$ (with $s : A \times B \simeq B \times A$ the isomorphism of symmetry). Since the relations $s, 1_{B\times A} \in \mathrm{Rel}(B, A)$ are equal (by the existence of the isomorphism s) it follows that the relation $(\neg r)^{-1} : (\neg R)^{-1} \hookrightarrow B \times A$ is the complement of the relation $r^{-1} : R^{-1} \hookrightarrow \hookrightarrow B \times A$.

REFERENCES

1. *J. A. Goguen*, Concept Representation in Natural and Artificial Languages : Axioms, Extensions and Applications for Fuzzy Sets. Int. J. Man-Machine Studies, 6, 513(1974).
2. *N. Popescu, L. Popescu*, Theory of categories. Editura Academiei Bucureşti, România Sijthoff & Noordhoff International Publishers, 1979.
3. *N. Popescu, A. Radu*, Teoria categoriilor şi a fasciculelor, Editura ştiinţifică, Bucureşti, 1971.
4. *I. Purdea, Gh. Pic.* Tratat de algebră modernă, Vol. I. Editura Academiei Republicii Socialiste România, Bucureşti, 1977.
5. *Gh. A. Radu*, Teoria toposurilor, vol. I, II. Editura Academiei Republicii Socialiste România, Bucureşti, 1982.

6. *M. Rebenciuc*, Relaţii şi operaţii neomogene într-o categorie. Buletinul Institutului Politehnic Bucureşti tomul XLVI—XLVII, Seria Chimie, 1984—1985.
7. *G. C. Wraith*, Lecture on elementary Topoi, Springer, Lecture Notes, 445, 1975.

Asupra relaţiilor binare neomogene într-o categorie

În această parte a lucrării se definesc relaţiile şi operaţiile cunoscute în Ens (categoria mulţimilor) pe mulţimea relaţiilor binare neomogene într-o categorie local şi colocal mică cu produse şi sume directe şi descompunere triunghiulară şi în particular într-un topos. Acest cadru asigură existenţa aproape a tuturor operaţiilor. Sînt date apoi două propoziţii relativ la unele din aceste relaţii şi operaţii.

În final (ceea ce este şi scopul acestei părţi a lucrării) se arată că se păstrează majoritatea proprietăţilor de legătură între inversă şi incluziune, intersecţie (fienită), reuniune (finită), compunere.

C.Z. :519.1

FINDING ALL MAXIMAL INDEPENDENT SETS OF AN UNDIRECTED GRAPH

D. MARCU*

The purpose of this paper is to present an algorithm, with a FORTRAN 77 program, which computes, for an arbitrary undirected graph, without loops and multiple edges, the independence number and all maximal independent sets.

Graphs, considered here, are *finite* and *simple* (without loops and multiple edges), and [1, 2, 3] are followed for terminology and notation.

Let $G = (V, E)$ be an *undirected graph* with V the set of *vertices* and E the set of *edges*. A set of vertices is said to be an *independent set*, if no two vertices in it are adjacent. A set is *dependent*, if at least two of the vertices in it are adjacent. A *maximal independent set* is an independent set which becomes dependent when any vertex is added to the set. The *independence number* $\alpha(G)$ of a graph G is the size of the largest maximal independent set.

Consider n projects which must be executed, and suppose that each project x_i requires some subset $R_i \subseteq \{1,2,\ldots,p\}$ of p available resources for its execution. Further, assume that each project (given its resource requirements) can be executed in a single time period. Now, form a graph G, each vertex of which corresponds to a project and with edges (x_i, x_j) added whenever x_i and x_j have some resource requirement in common, that is, whenever $R_i \cap R_j \neq \emptyset$. A maximal independent set of G then represents a maximal set of projects that can be executed simultaneously during the single time period.

In a dynamic system, new projects become available for execution after each time period, so that the family of maximal independent sets of G has to be found repeatedly, in order to choose which maximal set of projects to execute during the current period. In a practical system, it is not sufficient simply to execute the set of projects corresponding to the maximum independent set at every period, since some projects may then be delayed indefinitely. A better way would be to give a penalty p_i to every project (vertex) x_i which increases as the delay in the execution of x_i increases, and then at every point choose from the family of maximal independent sets that set which maximizes some function of the penalties on the vertices that it contains.

---

* Mathematician Ph. D., Bucharest Department of Telecommunications

For more details concerning the practical utilization of maximal independent sets, see the list of bibliographical references from [3, pp. 54—57].

In the sequel, we shall present an algorithm which computes recursively the maximal independent sets of a graph and which can be easy programmed on a computer (a FORTRAN 77 program is also given) because of the character of required operations.

Suppose that W is a nonempty subset of V. The subgraph of G, whose vertex set is W and whose edge set is the set of those edges of G that have both ends in W, is called the subgraph of G *induced* by W and is denoted by $G[W]$.

Let $V = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. For each $1 \leqslant k \leqslant n$, we denote $X_k = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ and by L_k the family of all maximal independent sets of $G[X_k]$. We denote by Y_k the following set:

$$Y_k = \{y : y \in X_k, (x_k, y) \notin E\}.$$

Algorithm

Step 1. Set $Y_1 = \{x_1\}$, $L_1 = \{x_1\}$ and $k = 1$.

Step 2. Determine the family $I_k = \{S : S = M \cap Y_{k+1}, M \in L_k\}$.

Step 3. Determine the family I'_k from I_k of the maximal sets related to the operation of inclusion of sets.

Step 4. Define the family of sets L^*_{k+1} as follows:
for each $M \in L_k$, if $Y_{k+1} \supseteq M$, then $M \cup \{x_{k+1}\} \in L^*_{k+1}$, and if $Y_{k+1} \not\supseteq M$, then $M \in L^*_{k+1}$ and $\{x_{k+1}\} \cup (M \cap Y_{k+1}) \in L^*_{k+1}$ if and only if $M \cap Y_{k+1} \in I'_k$.

Step 5. Determine the family L_{k+1} from L^*_{k+1} of the maximal sets related to the operation of inclusion of sets.

Step 6. Repeat the steps 2, 3, 4 and 5 for $k = 2, 3, \ldots, n-1$. At the end of the calculus process, we obtain the family L_n, that is, the family of all maximal independent sets of the graph G.

The justification of the algorithm follows from the manner of construction of the families of maximal independent sets L_{k+1}. Indeed, if the vertex x_{k+1} is not adjacent to any vertex from the maximal independent set M of $G[X_k]$, then $M \cup \{x_{k+1}\} \in L^*_{k+1}$, where L^*_{k+1} is a family of independent sets which contains all maximal independent sets of $G[X_{k+1}]$.

If x_{k+1} is adjacent to some vertices of M, then the set M is added to L^*_{k+1} and determine, for each $M \in L_k$ with this property, the set of vertices which are not adjacent to x_{k+1}. From these sets, we retain those which are maximal related to the operation of inclusion of sets, to which we add the vertex x_{k+1}, and the independent sets obtained in such a way are added to L^*_{k+1}. The family L^*_{k+1} will contain all maximal independent sets of $G[X_{k+1}]$. To prove this, let Z be such a maximal independent set. If $x_{k+1} \notin Z$, then Z is a maximal independent set of $G[X_k]$, and, otherwise, $Z \setminus \{x_{k+1}\}$ is an independent set of $G[X_k]$. Thus, Z is maximal or is included in a maximal independent set from the family L_k. Having in view the above construction, it follows that $Z \in L^*_{k+1}$.

The above algorithm was programmed in FORTRAN 77 V4. 0—1, on a PDP-11 computer, under the RSX—11M V4. 1 operating system (but, it can be implemented on any one compter having a FORTRAN language).

The program prints on any line a maximal independent set. It also computes and prints the independence number $\alpha(G)$.

In the program below, N denotes the number of vertices of G, and MAD the adjancency matrix of G, with N rows and N columns, that is,

$$\mathrm{MAD}(i, j) = \begin{cases} 1, & \text{if } (x_i, x_j) \in E. \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

The matrix MIS is used to compute the maximal independent sets of G,each row containing a maximal independent set.

The vector MV shows the number of elements of each maximal independent set.

$M1$ represents, for each $k = 2, 3, \ldots, n-1$, the number of rows of MIS occupyied by independent sets from L_k, and MC1 represents, in turn, the number of sets in the family L^*_{k+1} and in the family L_{k+1}, after the elimination of the sets which are included in other sets. At the end of $(k+1)$-th stage, $M1$ receives the value of $MC1$.

The independence number $\alpha(G)$ is equal to $\max\limits_{1 \leqslant I \leqslant M1} MV(\mathrm{I})$.

A concept which is the opposite of that of the maximal independent set is that of a maximal complete subgraph. Thus, a *maximal complete subgraph* (*clique*) of G is a subgraph based on the set S of vertices, which is complete and which is maximal in the sense that any other subgraph of G based on a set $H \supset S$ of vertices is not complete. Hence, in contrast to a maximal independent set for which no two vertices are adjacent, the set of vertices of a clique are all adjacent to each other. It is quite obvious, therefore, that the maximal independent set of a graph G corresponds to a clique of the graph G^c and *vice versa*, where G^c is the graph complementary to G. In a way analogous to the definition of the independence number, we can define the *clique number* (also known as the *density*) as being the maximum number of vertices in a clique.

Then, roughly speaking, for a "dense" graph the clique number is likely to be high, and the independence number low, whereas for a "sparse" graph the opposite is likely to be the case.

Obviously, using G^c instead of G, the above program computes all cliques of G and the density.

For the graph from [3, p. 30], the program have computed and printed, in 7 seconds, $\alpha(G) = 4$ and the following maximal independent sets :

$$\{x_1, x_3, x_7\}, \{x_2, x_4, x_8\}, \{x_1, x_4\},$$

$$\{x_2, x_5, x_7, x_8\}, \{x_1, x_5, x_7\},$$

$$\{x_3, x_6\}, \{x_4, x_6\}, \{x_3, x_7, x_8\}.$$

```
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
```

PROGRAM – MISING

This program (Maximal Independent Sets and the Independence Number of a Graph) computes the maximal independent sets and the independence number of an arbitrary undirected finite graph, without loops and multiple edges, having as data entry the adjacency matrix and the number of vertices.

****

Written by Dr. Dănuț Marcu

August 1988

```
      SUBROUTINE MISG(N, MAD, MIS)
C
C     This subroutine (Maximal Independent Sets of a Graph)
C     computes the maximal independent sets and the independence
C     number of an arbitrary undirected finite graph, without
C     loops and multiple edges, having as parameters :
C
C          N = the graph's number of vertices,
C        MAD = the adjacency matrix of the graph,
C        MIS = a scratch matrix,
C         MV = a scratch vector.
C
      DIMENSION MAD (N, N), MIS (1000, N), MV (1000)
      MIS(1,1) = 1
      MV(1) = 1
      M1 = 1
      K = 2
   33 IND1 = 0
      I = 1
      MC1 = M1
   32 J = 1
      IND = 0
   35 I5 = MIS(I, J)
      IF (MAD (I5, K)) 55, 56, 55
   55 IF (IND) 57, 53, 57
   53 IF (J-MV(I)) 334,69, 334
  334 J = J + 1
      I5 = MIS (I, J)
      IF (MAD(I5. K)) 53, 57, 53
   57 MC1 = MC1 + 1
      MV(MC1) = 0
      J = 1
   36 I5 = MIS (I, J)
      IF (MAD (I5, K)) 38, 58, 38
   58 MV (MC1) = MV (MC1) + 1
      I5 = MV (MC1)
      MIS (MC1, I5) = MIS (I, J)
   38 IF (J-MV(I)) 64, 65, 64
   64 J = J + 1
      GO TO 36
   65 IF (I-M1) 66, 37, 66
   66 I = I + 1
      GO TO 32
   56 IND = IND + 1
      IF (J-MV(I)) 67, 31, 67
```

```
67 J = J + 1
   GO TO 35
69 IF (I-M1) 70, 37, 70
70 I = I + 1
   GO TO 32
31 MV(I) = MV(I) + 1
   I5 = MV(I)
   MIS (I, I5) = K
   IND1 = IND1 + 1
   IF (I-M1) 71, 37, 71
71 I = I + 1
   GO TO 32
37 IF (MC1-M1) 72, 73, 72
73 IF(IND1) 54,74,54
74 MC1 = M1 + 1
   I1 = MC1
   MV(I1) = 0
   GO TO 44
72 I1 = M1 + 1
   IC = I1
43 IQ = I1
39 IF (IQ - IC) 75, 40, 75
40 IF (IQ - MC1) 76, 77, 76
76 IQ = IQ + 1
   GO TO 39
77 IF (IC - MC1) 78, 44, 78
78 IC = IC + 1
   GO TO 43
75 IF (MV(IQ) - MV(IC)) 40, 79, 79
79 I = 1
42 J = 1
41 IF (MIS(IC,I) - MIS(IQ, J)) 40,80, 81
80 IF (I - MV(IC))82, 45, 82
82 I = I + 1
   GO TO 42
81 IF(J - MV(IQ)) 83, 40, 83
83 J = J + 1
   GO TO 41
45 IF(IC - MC1) 84, 85, 84
85 MC1 = MC1 - 1
   GO TO 44
84 I2 = IC
47 I3 = I2 + 1
   I4 = 1
46 MIS(I2,I4) = MIS(I3, I4)
   IF(I4 - MV(I3)) 86, 87, 86
86 I4 = I4 + 1
   GO TO 46
87 MV(I2) = MV(I3)
   IF (I2 - MC1 + 1)88, 89, 88
88 I2 = I2 + 1
   GO TO 47
89 MC1 = MC1 - 1
   GO TO 43
44 M1 = MC1
48 MV(I1) = MV(I1) + 1
   I5 = MV(I1)
   MIS(I1, I5) = K
   IF(I1 - M1) 90, 54 ,90
90 I1 = I1 + 1
   GO TO 48
```

```
 54 IF(K - N) 91, 34, 91
 91 K = K + 1
    GO TO 33
 34 I1 = 1
    IC = I1
212 IQ = I1
211 IF (IQ - IC) 219, 213, 219
213 IF (IQ - M1) 220, 221, 220
220 IQ = IQ + 1
    GO TO 211
221 IF(IC - M1)222, 210, 222
222 IC = IC + 1
    GO TO 212
219 IF(MV(IQ) - MV(IC)) 213, 223, 223
223 I = 1
215 J = 1
214 IF(MIS(IC, I) - MIS(IQ, J)) 213, 224, 225
224 IF(I - MV(IC)) 226, 216, 226
226 I = I + 1
    GO TO 215
225 IF (J-MV(IQ)) 227, 213, 227
227 J = J + 1
    GO TO 214
216 IF(IC - M1) 228, 229, 228
229 M1 = M1 - 1
    GO TO 210
228 I2 = IC
218 I3 = I2 + 1
    I4 = 1
217 MIS(I2, I4) = MIS(I3, I4)
    IF(I4 - MV(I3)) 230, 231,230
230 I5 = I4 + 1
    GO TO 217
231 MV(I2 = MV(I3)
    IF(I2 - M1 + 1) 232,233, 232
232 I2 = I2 + 1
    GO TO 218
233 M1 = M1 - 1
    GO TO 212
210 PRINT 92
 92 FORMAT (' ', ' THE MAXIMAL INDEPENDENT SETS
    ARE :',//)
    DO 96 I = 1, M1
    MV1 = MV(I)
 96 PRINT 98, MIS (I, J), J = 1, MV1
 98 FORMAT (30X, 20 (I2, 2X))
    MX1 = MV(1)
    IF (M1.EQ.1) GO TO 101
    I = 2
 51 IF(MX1 - MV(I)) 99, 52, 52
 99 MX1 = MV(I)
 52 IF(I - M1) 100, 101, 100
100 I = I + 1
   GO TO 51
 101 PRINT 400
400 FORMAT (' ',//)
    PRINT 93, MX1
 93 FORMAT (' ', ' THE INDEPENDECE NUMBER IS
    EQUAL TO', I4)
    RETURN
    END
```

```
C
C
C                    DRIVER PROGRAM
C
C                    DIMENSION MAD(8,8), MIS(1000,8)
C
C                    ....DATA ENTRY....
C
                     ACCEPT *, N
                     DO 1 I = 1, N
                   1 ACCEPT *, (MAD(I, J), J = 1, N)
C
C                    ....BEGINNING OF CALCULUS...
C
                     CALL MISG (N, MAD, MIS)
C
C                    ....FINISH OF CALCULUS....
C
                     STOP
                     END
```

This program has been tested on a number of graphs, including the Moon-Moser graphs see [3, problem 10, p. 53]), and the computation times per maximal independent set generated were found to be almost constant and independent of the size of the graph itself, which makes the algorithm close to the best possible.

REFERENCES

1. *C. Berge*, Graphes et hypergraphes, Dunod, 1970.
2. *J. A. Bondy, U.S.R. Murty*, Graph theory with applications, Macmillan Press, 1976.
3. *N. Christofides*, Graph theory-An algorithmic approach, Academic Press, 1975.

Determinarea mulțimilor interior stabile maximale ale unui graf neorientat

În lucrare, se propun un algoritm și un program FORTRAN 77 pentru determinarea numărului de stabilitate internă și a mulțimilor interior stabile maximale, corespunzătoare unui graf neorientat finit, fără bucle și muchii multiple.

C.Z.: 517.9

CALCULUL NUMERIC AL UNOR FUNCȚII BESSEL DE SPEȚA ÎNTÎI ȘI AL DERIVATELOR LOR

V. A. MĂRIEȘ *

Lucrarea descrie o metodă aplicată la calculul numeric al funcțiilor Bessel de speța întîi și derivatele lor, de ordin natural n, $0 < n < 50$, și de argument complex particular $z = x \cdot e^{-j\pi/4}$, $x \in [\cdot 02 ; 10.]$, cu 14 cifre semnificative exacte. Aceste funcții intervin, de exemplu, în studiul și determinarea parametrilor efectului pelicular mediu din conductoarele masive cu secțiune transversală circulară și trapezoidală, aflate în crestături deschise și parțial deschise.

1. Introducere

În studiul efectului pelicular mediu din conductoarele masive de secțiune circulară și trapezoidală, aflate în crestături deschise și parțial deschise, intervin funcțiile Bessel de speța întîi și derivatele lor, de ordin natural și argument complex particular $z = x \cdot e^{-j\pi/4}$. Prezenta lucrare are ca obiect o metodă ce se poate aplica la calculul numeric al acestor funcții.

Funcțiile Bessel de speța întîi $J_n(z)$, de ordin natural n și argument complex z, sînt soluții particulare ale ecuației diferențiale de ordinul doi, de tip Bassel, de forma:

$$\frac{d^2u}{dz^2} + \frac{1}{z} \cdot \frac{du}{dz} + \left(1 - \frac{n^2}{z^2}\right) \cdot u = 0 \tag{1}$$

care, dezvoltate în serie de puteri, au forma:

$$J_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(z/2)^{2k+n}}{k!(n+k)!} \tag{2}$$

și între care există următoarele formule de recurență de ordinul doi:

$$J_{n+1}(z) = \frac{2 \cdot n}{z} \cdot J_n(z) - J_{n-1}(z) \tag{3}$$

$$J'_{n+1}(z) = J_n(z) - \frac{n+1}{z} \cdot J_{n+1}(z) \tag{4}$$

* Șef lucrări dr. ing, catedra Electrotehnică

2. Calculul numeric al funcțiilor Bessel de speța întîi și al derivatelor lor, de ordin natural și argument complex particular $z=x\cdot e^{-j\pi/4}$

Pe baza relației de recurență de ordinul doi (3) s-ar putea calcula valoarea funcției Bessel de speța întîi, pentru o anumită valoare a argumentului și pentru un anumit ordin natural, cunoscîndu-se valorile cît mai exacte ale funcțiilor Bessel de speța întîi pentru aceeași valoare a argumentului și pentru două ordine naturale mai mici. Dar, se demonstrează că eroarea valorii funcției Bessel obținute în acest mod este egală cu produsul dintre eroarea de rotunjire și factorialul ordinului natural al funcției Bessel căutate și din acest motiv se renunță la această variantă.

Folosindu-se relația de recurență de ordinul doi (4), se poate obține valoarea derivatei întîi a funcției Bessel de speța întîi cu eroarea minimă, pentru o anumită valoare a argumentului și pentru un anumit ordin natural, cunoscîndu-se valorile cît mai exacte ale funcțiilor Bessel pentru cele două ordine naturale și pentru aceeași valoare a argumentului.

În consecință, pentru a obține valorile funcțiilor Bessel de speța întîi și a derivatelor lor, pentru orice ordin natural și argument complex particular $z = x\cdot e^{-j\pi/4}$, se adoptă varianta prin care se calculează valorile funcțiilor Bessel de speța întîi pentru orice ordin natural cu un număr cît mai mare de cifre semnificative exacte, pornind de la dezvoltarea în serie de puteri (2):

$$J_n(x\cdot e^{-j\pi/4}) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\cdot\frac{\left(\frac{x}{2}\cdot e^{-j\pi/4}\right)^{2k+n}}{k!(n+k)!} =$$

$$=\left(\frac{x}{2}\cdot e^{-j\pi/4}\right)^n\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\cdot\frac{\left(\frac{x}{2}\cdot e^{-j\pi/4}\right)^{2k}}{k!(n+k)!} = \tag{5}$$

$$=\left(\frac{x}{2}\right)^n\cdot e^{-jn\pi/4}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\cdot\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}}{k!(n+k)!}\cdot e^{-jk\pi/2} =$$

$$=\left(\frac{x}{2}\right)^n(C+j\cdot D)\left[S1+j\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2\cdot S2\right]$$

unde, pentru $n=4m+i$, $m\in N$, $i\in\{0;1;2;3\}$, s-a notat:

$$C=\begin{cases}1\ , & i=0\\ \frac{\sqrt{2}}{2}, & i=1\\ 0\ , & i=2\\ -\frac{\sqrt{2}}{2}, & i=3\end{cases}\qquad D=\begin{cases}0\ , & i=0\\ -\frac{\sqrt{2}}{2}, & i=1\\ -1\ , & i=2\\ -\frac{\sqrt{2}}{2}, & i=3\end{cases}$$

$$S1=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\cdot\frac{(x/2)^{4k}}{(2k)!(n+2r)!}$$

$$S2=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\cdot\frac{(x/2)^{4k}}{(2k+1)!(n+2k+1)!} \tag{6}$$

Se observă că, datorită formei particulare a argumentului, funcţiile Bessel de speţa întîi şi de orice ordin natural conţin serii alternate. Cu scopul de a verifica dacă aceste serii sînt de tip Leibnitz, vom studia monotonia termenului general al seriei $S1$, care este un caz nefavorabil faţă de seria $S2$. Notăm termenul general al seriei $S1$ cu:

$$T_k = \frac{(x/2)^k}{(2k)!\,(n+2k)!} \tag{7}$$

şi facem raportul a doi termeni consecutivi:

$$\frac{T_{k+1}}{T_k} = \frac{(x/2)^4}{(2k+2)(2k+1)(n+2k+2)(n+2k+1)}, \tag{8}$$

de unde se poate vedea că pentru $k > k_0$ termenii sînt monoton descrescători spre zero, k_0 fiind rangul termenului maxim în valoare absolută. Întrucît funcţiile Besel de speţa întîi se calculează pentru ordinul natural 0 pînă la 10, pentru argumentul complex de modul $x = .02(.02)10.$, se poate vedea că, de exemplu, pentru $x = .02$ şi orice n, termenii descresc, începînd cu T_0, iar pentru $x = 10.$ şi orice n, termenii sînt descrescători, începînd cu T_2. Deci, seriile $S1$ şi $S2$ sînt de tip Leibnitz.

În cazul seriilor de tip Leibnitz, la însumarea unui număr finit de termeni, restul este mai mic decît primul termen neglijat în valoare absolută. În consecinţă, se poate determina numărul minim de termeni necesari pentru a obţine un număr dat de cifre semnificative exacte. Considerînd în acest scop seria S1, care este cazul cel mai nefavorabil şi pentru care se cunoaşte că la $n = 0$ valoarea aproximativă este de 140, ne asigurăm că vom avea $s = 14$ cifre semnificative exacte dacă se îndeplineşte condiţia:

$$T_{k_{min}} < 140.10^{-s} \tag{9}$$

Pentru $x = .02$, relaţia (9) devine:

$$\frac{(10^{-2})^{4k_{min}}}{[(2k_{min})!]^2} < 140 \cdot 10^{-14} \tag{10}$$

şi folosind formula lui Stirling pentru aproximarea factorialului:

$$n! \simeq (n/e)^n \sqrt{2\pi n}, \tag{11}$$

după logaritmarea inegalităţii:

$$10^{-8k_{min}} < [(2k_{min}/e)^{2k_{min}}]^2 \cdot 2\pi \cdot 2k_{min} \cdot 140 \cdot 10^{-14}, \tag{12}$$

prin încercări succesive, se obţine $k_{min} = 3$. Pentru $x = 10.$, procedînd analog, se obţine $k_{min} = 14$.

În concluzie, pentru a obține $s = 14$ cifre semnificative exacte prin însumarea a k_{min} termeni, se poate folosi formula acoperitoare semiempirică:

$$k_{min} = [x] + 5 \tag{13}$$

Întrucît în calculul numeric cu numere aproximative, care au un număr finit de cifre semnificative exacte, proprietățile de asociativitate a adunării și de distributivitate a înmulțirii în raport cu adunarea nu mai sînt valabile, însumarea termenilor se face începînd cu cel mai mic termen în valoare absolută.

Calculul funcțiilor Bessel de speța întîi și a derivatelor lor, de ordin natural 0 pînă la 10, pentru argumentul complex $z = x \cdot e^{-j\pi/4}$, cu $x = .02(.02)10.$, a fost efectuat prin executarea programului FBJN, în limbaj FORTRAN, obținîndu-se 14 cifre semnificative exacte așa cum se vede în tabelul 1 și în tabelul 2.

Tabelul 1

n	x	$\mathrm{Re}\{J_n(x \cdot e^{-j\pi/4})\}$	$\mathrm{Im}\{J_n(x \cdot e^{-j\pi/4})\}$
0	.02	$.99999999749999 \cdot 10^{0}$	$.99999999972222 \cdot 10^{-4}$
	10.	$.13985190082212 \cdot 10^{3}$	$.59101759426946 \cdot 10^{2}$
10	.02	$.25052108385174 \cdot 10^{-31}$	$-.27557319222942 \cdot 10^{-26}$
	10.	$.26464761023361. 10^{1}$	$.20757731074491 \cdot 10^{1}$

Tabelul 2

n	x	$\mathrm{Re}\{J'_n(x.e^{-j\pi/4})\}$	$\mathrm{Im}\{J'_n(x \cdot e^{-j\pi/4})\}$
0	.02	$-.70714213593634 \cdot 10^{-2}$	$.70707142525823 \cdot 10^{-2}$
	10.	$-.62143254719189 \cdot 10^{2}$	$.13276848198256 \cdot 10^{3}$
10	.02	$.97430899338790 \cdot 10^{-22}$	$-.97428773596904 \cdot 10^{-24}$
	10.	$-.10012385664081. 10^{1}$	$.37600194141746 \cdot 10^{1}$

Cu ajutorul altor programe în care însumarea se făcea începînd cu termenul de rang zero, valorile obținute aveau doar 6—7 cifre semnificative exacte.

Se menţionează că, pe baza acestor valori calculate, se pot determina şi valorile calculate, se pot determina şi valorile următoarelor funcţii:

$$J_{-n}(x \cdot e^{-j\pi/4}) = (-1)^n \cdot J_n(x \cdot e^{-j\pi/4})$$

$$J'_{-n}(x \cdot e^{j\pi/4}) = \overline{J'_n(x \cdot e^{-j\pi/4})}$$

$$J_n(x \cdot e^{j\pi/4}) = \overline{J_n(x \cdot e^{-j\pi/4})} \tag{14}$$

$$J_n(x \cdot e^{j3\pi/4}) = e^{jn\pi} \cdot J_n(x \cdot e^{-j\pi/4})$$

$$J_n(x \cdot e^{j5\pi/4}) = e^{jn\pi} \cdot \overline{J_n(x \cdot e^{-j\pi/4})}$$

În cazul conductorului masiv cu secţiune transversală circulară intervine raportul între funcţie Bessel de speţa întîi $J_n(z)$ şi derivata sa $J'_n(z)$. Deoarece convergenţa seriei în care intervine acest raport este lentă trebuie să se însumeze un număr cît mai mare de termeni, ceea ce duce la creşterea ordinului funcţiilor Bessel de speţa întîi şi a derivatelor lor pînă la $n = 50$. Creşterea performanţelor de calcul ale programului FBJN s-au realizat prin translatarea domeniului în care se află exponentul ordinului de mărime al valorilor funcţiilor Bessel de speţa întîi, pentru că exponentul ordinului de mărime al numerelor reprezentate în calculator este cuprins între -75 şi $+75$. Astfel, pentru $x = .02$ şi $n = 50$, termenul minim este:

$$T_{k_{min}} = T_5 = \frac{10^{-40}}{11!\,61!} \simeq 10^{-131} \tag{15}$$

ar termenul maxim este:

$$T_{k_0} = T_0 = \frac{1}{51!} \simeq 10^{-66} \tag{16}$$

astfel că, domeniul exponentului ordinului de mărime al termenilor este cuprins între -131 şi -66 şi, înmulţind termenul minim al seriilor S1 şi S2 cu factorul $P = 10^{65}$, acesta este translatat între -56 şi -1. Pentru $x = 10.$ şi $n = 50$, termenul minim este:

$$T_{k_{min}} = T_{15} = \frac{5^{62}}{81!\,31!} \simeq 10^{-111} \tag{17}$$

iar termenul maxim rămîne acelaşi (16), astfel că, exponentul ordinului de mărime al termenilor este cuprins între -111 şi -66 şi, înmulţind termenul minim al seriilor $S1$ şi $S2$ cu factorul $P = 10^{50}$, acesta este translatat între -71 şi -16.

Creșterea performanțelor de calcul ale programului FBJN s-a realizat prin amplificarea termenului minim al seriilor $S1$ și $S2$ cu factorul:

$$P = \begin{cases} 10^{15+n}, & x \in [.02\,;\,1.] \\ 10^{n}\ , & x \in (1.\,;\,10.] \end{cases} \tag{18}$$

3. Concluzii

a.) Forma particulară a argumentului complex permite deducerea dezvoltării în seria de puteri (5) a funcției Bessel de speța întîi și ordin natural.

b.) Periodicitatea exponențialei de argument complex duce la exprimarea funcției Bessel de speța întîi și ordin natural prin serii de tip Leibnitz rapid convergente.

c.) Programul optimizat FBJN realizează calculul funcțiilor Bessel de speța întîi și ordin natural n, $0 \leqslant n \leqslant 50$, pentru argumentul complex $z = x \cdot e^{-j\pi/4}$, $x = .02(.02)10.$, cu 14 cifre semnificative exacte.

d.) Performanțele ridicate ale programului optimizat FBJN permit studiul și determinarea parametrilor efectului pelicular mediu în conductoare masive cu secțiune trasversală circulară, aflate în crestături deschise și parțial deschise.

BIBLIOGRAFIE

1 *A. Gray, G. B. Mathews*, A treatise on Bessel functions and their applications to physics, McMillan and Co., London, 1952

2 *A. Angot*, Compléments de mathématiques á l'usage des ingénieurs de l'électrotechnique et des télécommunications, Editions de la Revue d'optique, Paris, 1961.

3. *W. S. Dorn, D. McCracken*, Numerical Methods with FORTRAN IV Case Studies, John Wiley & Sons, Inc., New-York, London, Sydney, Toronto, 1972

4 * * * Tabliți funcții Besselea $J_0(z)$ i $J_1(z)$ v kompleksnoi oblasti, Vîcislitelinîi țentr an CCCP, Moskva, 1963.

La calcul des fonctions Bessel de premier degré et de leur dérivées

On présente une méthode de calcul des fonctions Bessel de premier degré et de leur dérivées d'ordre n, naturel, $o<n<5o$ et d'argument complexe particulier, $z=x.e^{-j\frac{\pi}{4}}$, $x \in [.02;\ 10.]$ avec 14 chiffres significatifs.

Ces fonctions interviennent, par exemple, dans l'etude de l'effet pelliculaire dans les conducteurs massifs à section circulaire ou trapézoïdale, dans encoches ouvertes ou partiellement ouvertes.

C.Z. 532 : 783 + 547 : 655

CHOLESTERIC TEXTURE MICRODOMAIN DYNAMICS IN TURBULENT MOTION

IULIANA CUCULESCU, RODICA BENA*

The cholesteric texture microdomain dynamics in turbulent motion was revealed by recording the intensity light variation within the cholesteric H_v scattering pattern.

The mean frequencies of the liquid crystal microdomains movement were determined at three temperatures and for several d.c. electric fields succesively applied to the samples.

The method gives a direct possibility for studying different types of anisotropic media motions.

1. Introduction

It was experimentally proved that as a result of applying the d.c. electric field, at different temperatures, on samples containing binary cholesteric mixtures with pleochroic dyes as hosts, the electrohydrodynamic instabilities were induced [1], [2]. The types of electrohydrodynamic instabilities were revealed on the $E_c = f(T)$ diagrams (where E_c is the critical field corresponding to the cholesteric-nematic transition) [3], [4], [5].

In this paper we present a recording method of the cholesteric texture microdomain dynamics in turbulent motion; it consists in registering the light intensity variation within the cholesteric mesophase scattering pattern.

2. Experimental

In order to obtain the mesophase cholesteric H_v figure, the following experimental equipment was used (fig. 1): the polarised He—Ne laser, the liquid crystal termostated sample, the polarizer, the screen (or the photomultiplier), the amplifier and the X-time recorder.

The scattering figure has four symmetrical lobes (fig. 2a) which appeared very clearly when applying a d.c. electric field (fig. 2b). When the electric field increased a turbulent motion started. The distribution

* Lecturer Ph. D., Lecturer Ph. D., Physics Dept.

of the light intensity in the scattering figure changed due to the turbulence existing in the sample.

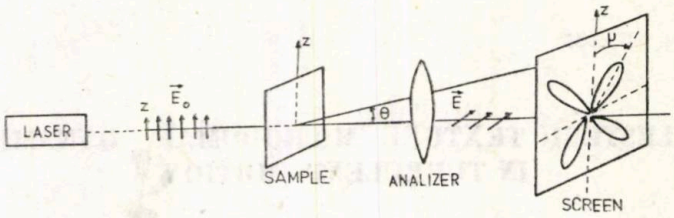
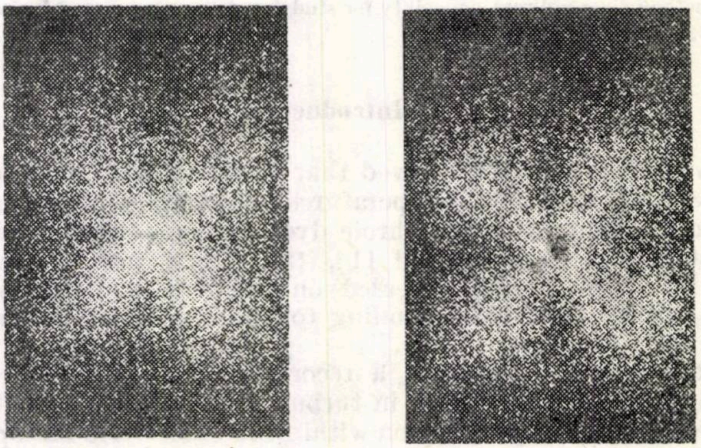


Fig. 1 — Schematic representation of the experimental arrangement

The four symmetrical lobes H_v pattern preserved as long as the sample was in the cholesteric mesophase. But in every point of the scattering figure the light intensity varied in time, being modulated by the movement of the crystal microdomains.



a *b*

Fig. 2 — Photomicrographs of mesophase cholesteric H_v scattering figure.

a) $E = 0$, $t = 50°C$; b) $E = 1{,}2 \cdot 10^6 \frac{V}{m}$, $t = 50°C$

The scattering area of the liquid crystal crossed by the laser beam was delimited by a 0,1 mm pinhole, in order to record the light intensity variation in time, determined by the movement of an as small as possible liquid crystal domain. The photomultiplier, screenning with a circular diaphragm (Ø = 0,2 mm), was used after removing the screen. Several continuous electric fields were succesively applied to the sample at 50, 48, 46°C. Some of the time evolution of the corresponding light intensities scattered by a liquid crystal microdomain are shown in fig. 3.

The mean frequencies of the liquid crystal microdomains movement are shown in fig. 4. These frequencies were determined by considering

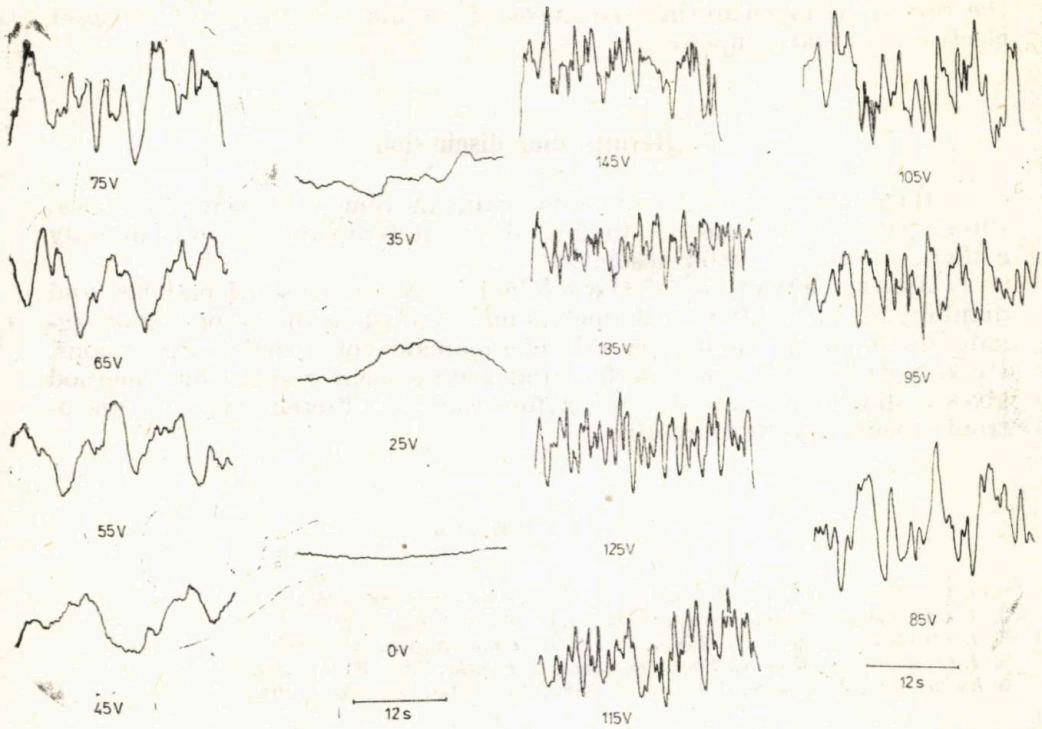


Fig. 3 — The time evolution of the light intensity scattered by a liquid crystal microdomain

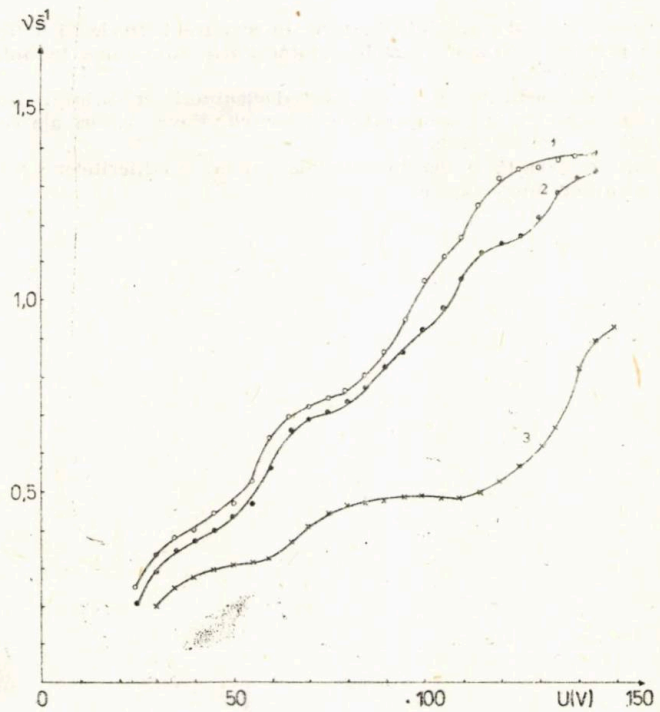


Fig. 4 — The mean frequencies versus applied voltage: 1) t = 50 °C; 2) t = 48 °C; 3) t = 46 °C

the results obtained during sequences of 30 min recordings, at constant electric field and temperature.

3. Results and diseussion

Using this method, the microdomains movement for a liquid crystal submitted to a d.c. electric field at different temperatures, was directly evidenced, with a good resolution.

Another advantage of the method is that the use of pinholes and diaphragms with different diameters makes possible the recording of signals scattered by liquid crystal microdomains of variable dimensions. By comparing with the interferential arrangement results, our method gives a direct and accesible mean for studying different types of anisotropic media turbulent motion.

REFERENCES

1. *I. Cuculescu, C. Florea, A. Enache, I. Baciu,* Displays, 2, 86 1980.
2. *I. Cuculescu, R. Bena, E. Popa, O. Savin,* Displavs, 3, 143, 1980.
3. *I. Cuculescu, R. Bena , I. Baciu,* An. Univ. Timişoara Fiz. XX 1982.
4. *I. Cuculescu, R. Bena, C. Florea, O. Savin, A. Enache,* Phys. Rev. A., *27*, 2, 1983.
5 *I. Cuculescu, A. Enache, C. Florea, R. Bena,* Phys. Stat. Sol. (a), *81*, 191 1984,

Dinamica microdomeniului colesteric în mişcare turbulentă

Dinamica microdomeniului colesteric în mişcare turbulentă a fost pusă în evidenţă prin înregistrarea variaţiilor intensităţii luminoase în interiorul imaginilor de dispersie.

Frecvenţele medii ale mişcării microdomeniului cristalului lichid au fost determinate pentru trei temperaturi şi pentru cîteva valori ale cîmpului electric continuu, aplicat probei.

Metoda reprezintă o posibilitate de studiu a diferitelor tipuri de mişcare a mediilor microscopice.

C. Z.: 669.715

CERCETĂRI PRIVIND ASPECTE ALE MECANISMULUI DE MODIFICARE A ALIAJELOR DE ALUMINIU SPECIALE

M. IENCIU, P. MOLDOVAN, N. PANAIT, LIDIA CRISTEA, GABRIELA POPESCU *

Lucrarea prezintă rezultatele cercetărilor privind mecanismul de modificare a aliajelor deformabile ale sistemului Al—Mg, utilizînd prealiaje și săruri modificatoare.

1. Considerații generale și scopul lucrării

M o d i f i c a r e a este un proces de îmbunătățire artificială a structurii metalelor și aliajelor, realizat prin diferite procedee: folosirea de microadaosuri (m o d i f i c a t o r i), creșterea vitezei de răcire, tratarea cu ultrasunete a topiturii, amestecarea electromagnetică a topiturilor, r e t o p i r e a dendritelor etc.

Cercetările teoretice și experimentale efectuate pînă în prezent indică drept modificatori potențiali pentru aliajele de aluminiu deformabile, în special titanul și borul adăugați simultan, deși au fost și sînt încă în curs cercetări ce urmăresc influența unui număr mare de elemente modificatoare (W, Mo, Ta, Cr, V, Zr, Nb ș.a.) [1, 2, 3].

Alegerea procedeului optim de finisare a granulației, tipul de modificator și conținutul acestuia au o influență deosebită asupra proprietăților aliajelor de aluminiu. La alegerea unui modificator optim trebuie luați în considerare mai mulți factori, iar ordinea preferențială a importanței lor este determinată de: dimensiunea grăunților de aliaj cerută de operațiile ulterioare de deformare plastică, conținuturile maxime admisibile de Ti și B remanent după modificare, costul modificatorilor și a operației de modificare.

Modificatorii pot fi introduși în topitura pe bază de aluminiu fie sub formă de prealiaje fie sub formă de săruri.

Prealiajele Al—Ti—B (sub formă de bare) sînt utilizate în majoritatea turnătoriilor la finisarea structurii unei game largi de aliaje de aluminiu.

Morfologia și dimensiunile particulelor de $TiAl_3$ și TiB_2 din prealiaj pot influența eficiența modificării.

Lucrarea are drept scop compararea influenței adaosurilor modificatoare asupra proprietăților și structurii unor aliaje (AlMg5) folosind

* Prof. dr. ing.; Șef lucrări dr. ing.; Șef lucrări dr. ing.: Asist. ing.; Asist. ing., catedra Metalurgia metalelor ne feroase

metoda introducerii adaosurilor sub formă de prealiaje Al—Ti—B și sub formă de amestecuri de săruri solide pulverulente sau topite în prealabil.

2. Rezultate experimentale și interpretarea lor

Pentru cercetarea influenței adaosurilor modificatoare (Ti și B) asupra proprietăților mecanice și a structurii aliajelor de aluminiu s-au utilizat două metode : metoda introducerii adaosurilor formă de prealiaj ternar Al—Ti—B și metoda introducerii acestora sub formă de amestecuri de săruri.

Aliajele utilizate în cercetarea experimentală au fost elaborate din aluminiu primar, magneziu primar și prealiaje.

Compoziția chimică a aliajului AlMg5 este următoarea : 5,08% Mg ; 0,41% Mn ; 0,038% Cu ; 0,3% Fe ; 0,26% Si ; 0,03% Zn.

Pentru modificare s-a utilizat, în varianta I, prealiaj ternar Al—Ti—B (cu 5% Ti și 1% B), iar în varianta a II-a un amestec de săruri compus din KBF_4 și K_2TiF_6. O parte din acesta s-a omogenizat și s-a topit, în prealabil, într-un cuptor electric cu rezistoare, în creuzete de alumină sinterizată, la temperatura de 620°C.

Pentru a se controla în mod riguros științific efectul produs de elementele modificatoare asupra structurii aliajelor cercetate, acestea au fost rafinate în prealabil la temperatura de 720—750°C.

Instalația utilizată pentru rafinare, complet automatizată, este compusă din : cuptor de topire, cuptor-unitate de filtrare-degazare și, mașină de turnare semicontinuă verticală a barelor cu diametru 30 mm. Toate cuptoarele, de capacitate 2 kg, sînt electrice cu rezistoare din kanthal. La elaborare s-a utilizat un flux de protecție de compoziție : 55% $MgCl_2$; 20% KCl : 16% MgF_2 ; 9% CaF_2.

Filtrarea topiturii pentru eliminarea incluziunilor nemetalice (Al_2O_3, Al_2MgO_4, Al_4C_3, Al_4O_4C etc.), s-a efectuat printr-un strat filtrant activ de compoziție : 58% Mg Cl_2 ; 26% KCl ; 16% MgF_2 depus pe bile de alumină sinterizată cu diametrul 20 mm. Fluxul s-a ales fără sodiu, pentru a nu influența negativ procesul de deformare plastică a aliajelor. Degazarea băii metalice s-a efectuat cu un amestec de Ar + 1...3% Cl_2 și suplimentar cu burete de titan purificat în prealabil [4].

Modificarea s-a realizat la temperatura de 740°C, atît cu prealiaj AlTi5Bl cît și cu amestec de săruri (KBF_4 și K_2TiF_6).

Prealiajul a fost introdus în topitură sub formă de particule cu dimensiunea 2—3 mm, iar amestecul de săruri sub formă solidă (în folie de aluminiu) sau sub formă de săruri omogenizate și topite în prealabil. În timpul modificării, baia metalică a fost amestecată continuu cu o paletă de grafit acționată mecanic.

Turnarea aliajelor s-a realizat la temperaturi cu 50°C mai mari decît temperaturile lichidus ale aliajelor cercetate.

Tehnica de modificare a aliajelor de aluminiu prin introducerea prealiajelor Al—Ti—B în topitură este prezentată de colectivul nostru în lucrările anterioare [5, 6].

În ceea ce privește modificarea cu amestecuri de săruri, condițiile de introducere a acestora și durata procesului sînt date în tabelul 1.

Tabelul 1

Condițiile experimentale la modificarea aliajelor de aluminiu deformabile cu amestecuri de săruri

Nr. exp.	Cantitatea totală de amestec de săruri, g	Compoziția amestecului, în %		Durata modificării, min.
		K_2TiF_6	KBF_4	
	a) *Amestec de săruri solide*			
1	10,7	91,6	8,4	5
2	10,7	91,6	8,4	10
	b) *Amestec omogen de săruri topite în prealabil*			
1—2	5,17	85,11	14,89	5
3—4	8,46	85,10	14,90	5
5—6	10,57	85,11	14,89	5
7—8	21,15	85,10	14,90	5
9—10	31,72	85,10	14,90	5

Din aliajele modificate s-au prelevat probe pentru încercări mecanice și probe pentru studii metalografice la microscopul optic MC 5A și la microsonda electronică.

Dependența proprietăților mecanice de adaosurile de titan și bor la modificarea aliajului AlMg5 cu prealiaje și săruri este dată în figurile 1 și 2.

Rezistența la rupere la tracțiune este mai mare în cazul utilizării prealiajelor Al—Ti—B și a sărurilor solide și mai scăzută în cazul folosirii sărurilor topite în prealabil. Conținutul optim de titan în cazul modificării cu Ti + B introduse sub formă de prealiaj ternar, este de 0,08%. În primele două cazuri s-a produs dizolvarea mai accentuată a titanului și borului în matricea de aluminiu.

S-a constatat că alungirea crește pe măsura adaosului de modificator atît în cazul utilizării prealiajelor cît și a sărurilor topite în prealabil, valorile obținute fiind comparabile.

În cadrul experimentărilor a rezultat efectul mărit al adaosurilor de săruri în stare solidă, pulverulentă, față de amestecul de săruri topite în prealabil.

La adaosul de săruri solide, KBF_4 interacționează înaintea K_2TiF_6 cu aluminiul lichid, avînd ca efect creșterea solubilității titanului în topitură și formarea de germeni (de $TiAl_3$) de cristalizare în centrul greutăților.

La utilizarea amestecului de săruri, topit în prealabil, se micșorează activitatea termodinamică a acestora precum și a Ti și B în amestecul binar și interacțiunea sărurilor cu aliajul lichid este mai slabă.

În figura 3, a se prezintă micrografia electronică prin baleiaj (SEM) și profilul intensității radiației caracteristice $Ti_{k\alpha}$ pe direcția liniei de ba-

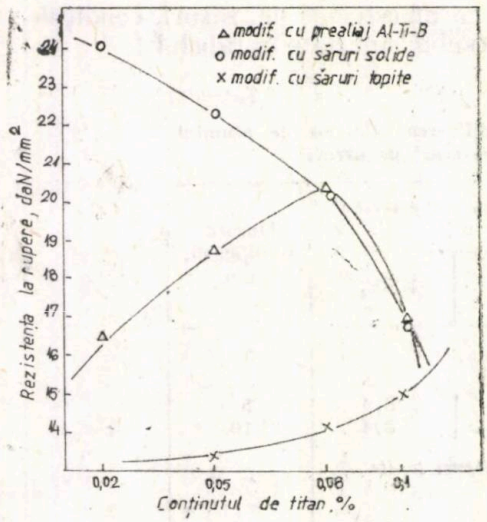


Fig. 1 — Dependenţa rezistenţei la rupere, la tracţiune, a aliajului AlMg 5, de conţinutul de titan

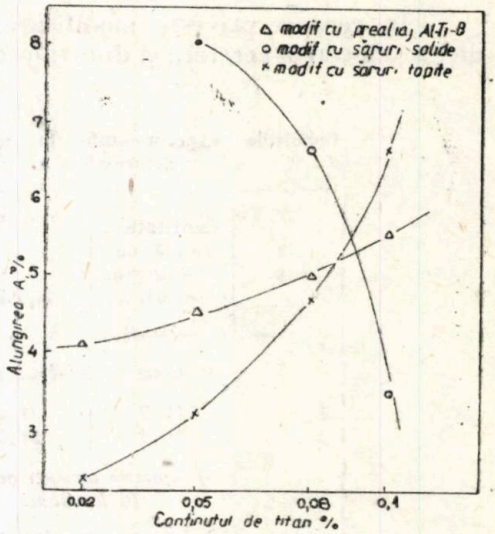


Fig. 2 — Dependenţa alungirii aliajului AlMg5 de conţinutul de titan

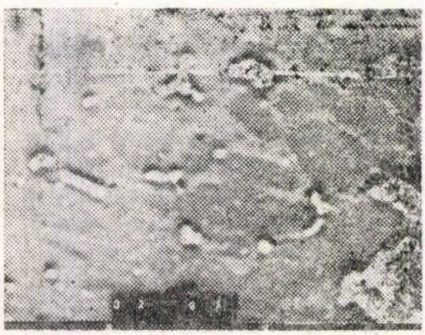


Fig. 3 a — Micrografia electronică prin baleiaj şi profilul intensităţii radiaţiei caracteristice $Ti_{k\alpha}$ pe direcţia liniei de baleiaj a aliajului AlMg5, modificat cu săruri. Mărire 600×

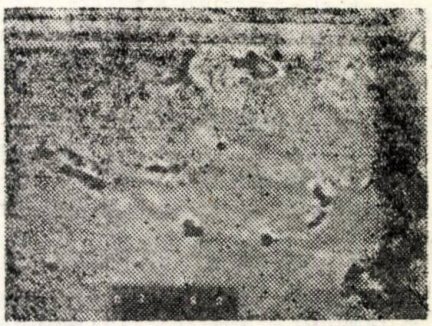


Fig. 3 b — Imaginea de compoziţie a aliajului AlMg5 modificat cu săruri. Mărire 600×

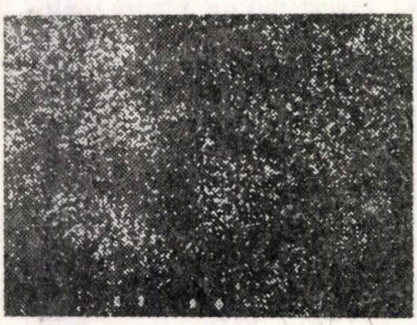


Fig. 3 c — Imagine de raze X pentru $Ti_{k\alpha}$ în aliajul AlMg5 modificat cu săruri topite în prealabil. Mărire 600×

leiaj a aliajului AlMg5 modificat cu amestec de săruri omogen, topit în prealabil, la o mărire 600×. Imaginea de compoziție a aliajului modificat cu săruri este dată în figura 3, b, iar în figura 3, c, imaginea de raze X produsă de radiația $Ti_{k\alpha}$ în aliajul AlMg5, la o mărire 600 ×, cînd se utilizează săruri topite în prealabil.

În figura 4 se prezintă imaginea de raze X pentru $Ti_{k\alpha}$ la modificarea cu săruri solide pulverulente.

Fig. 4 — Imagine de raze X pentru $Ti_{k\alpha}$ în aliajul AlMg5 modificat cu amestec de săruri pulverulente ($KBF_4+K_2TiF_6$)

Rezultatele experimentale obținute permit să se rețină o serie de concluzii importante privind modificarea aliajului AlMg5.

Din studiul efectuat asupra aliajelor modificate cu amestecuri de săruri rezultă că acestea au un conținut mai redus de incluziuni nemetalice (TiB_2) comparativ cu aliajele modificate cu prealiajAl—Ti—B.

La adaosul de săruri, titanul se dizolvă în stare atomică în aliaj, ceea ce conduce la formarea unei cantități mari de germeni de cristalizare de tipul $TiAl_3$.

Asimilarea titanului și borului în aliajul AlMg5 din amestecuri de săruri este de 20...40%, depinzînd de temperatură și de durata de menținere pentru modificare.

Din experimentări s-a constatat că adaosul de săruri K_2TiF_6 + + KBF_4 nu asigură randamente suficient de mari de asimilare a titanului și borului și produce o neuniformitate structurală a aliajelor modificate. La adăugarea pulberii de aluminiu în amestecul de săruri se intensifică reacțiile de formare a bororilor:

$$3\,K_2TiF_6 + 6\,KBF_4 + 10\,Al_{(s)} \rightarrow 3\,TiB_2 + 10\,AlF_3 + 12\,KF$$

$$6\,KBF_4 + 11\,Al_{(s)} \rightarrow 3\,AlB_2 + 8\,AlF_3 + 6\,KF.$$

În aceste condiții este posibilă formarea fazei metastabile $(Al, Ti)B_2$ care mărește eficiența modificării structurii aliajelor AlMg5 iar borura de titan constituie suport pentru creșterea compusului lui $TiAl_3$, care este modificatorul de bază pentru aliajul cercetat.

Particulele de TiB_2 din prealiajul AlTi5B1 au dimensiunea 0,8... ...3 μm, pe cînd particulele de TiB_2 care rezultă la modificarea cu săruri au dimensiuni de 0,5...1 μm. Particulele mai mari, după un anumit timp de menținere a topiturii pot să se decanteze, micșorîndu-se astfel efectul modificării.

Modificarea cu săruri a aliajelor de aluminiu-magneziu are efect corosiv asupra căptușelii agregatelor în care se efectuează operația de modificare.

BIBLIOGRAFIE

1. *M. Ienciu, P. Moldovan, N. Panait, M. Buzatu*, Elaborarea şi turnarea aliajelor neferoase speciale, Bucureşti, Editura didactică şi pedagogică, 1985.
2. *G. T. Campbell, G. A. Sutker*, Congres de metalurgie, Denver, Colorado, S.U.A., februarie, 1987
3. *F. R. Mollard, W. G. Lidman, J. C. Boiley* , Congres de metalurgie, Denver, Colorado, S.U.A. februarie, 1987
4. *M. Ienciu, P. Moldovan, N. Panait, M. Buzatu, R. Fazekas, L. Cristea, P. Botoran*, Metalurgia R.S. R., nr. 6, 1982.
5. *M. Ienciu, P. Moldovan, N. Panait, L. Cristea, M. Buzatu*, Metalurgia, 37 (1985), nr. 2
6. *M. Ienciu, P. Moldovan, N. Panait, L. Cristea*, Sesiunea de comunicări ştiinţifice, Academia R.S.R.., Bucureşti, 1985.

Recherches concernant différents aspects du mécanisme de modification des alliages spéciaux d'aluminium

L'ouvrage présente les résultats des recherches concernant le mécanisme de modification des alliages déformables du système Al—Mg, utilisant des préalliages et des sels modificateurs.

C.Z.: 669.018.1 : 536.7

UNELE CONSIDERAȚII PRIVIND TERMODINAMICA ALIAJELOR BINARE

D. TALOI*

În lucrare este prezentat un nou model de interacțiune, aplicabil aliajelor lichide precum și sistemelor ionice binare.

Acest model, ce ia în considerare faptul că în majoritatea topiturilor apar elemente de ordine datorită neadităvității legăturilor dintre atomii de natură diferită, reprezintă o variantă perfecționată a modelului soluției subregulare.

Modelul este verificat cu bune rezultate pe sistemul Li-Mg, fiind determinate în acest sens energiile de amestec Q și q și parametrul structural λ.

Studiul proprietăților termodinamice ale topiturilor metalurgice (aliaje, mate, zguri, săruri topite) constituie una din preocupările majore ale cercetătorilor din acest domeniu și aceasta atît din considerente teoretice cît și practice. Cunoașterea activității diferiților componenți și a variației acesteia cu compoziția topiturii oferă o imagine asupra structurii acesteia și permite totodată aprecierea distribuției interfazice a componenților, fenomen ce joacă un rol determinant în stabilirea pierderilor de metal în procesele pirometalurgice.

În cazul în care se urmărește aplicabilitatea practică a relațiilor de calcul ale activității componenților în topituri accentul se pune pe concordanța dintre valorile reale experimentale și cele calculate.

În acest sens, pentru a obține o bună concordanță, se recurge deseori la modele empirice cum sînt : relațiile Margules [1, 3], relații bazate pe utilizarea polinoamelor ortogonale Legendre [2, 3], ecuațiile Redlich-Keaster [3, 4], funcții spline [5, 6, 7, 8].

În paralel cu aceste modele empirice de interacțiune s-au dezvoltat și perfectat o serie de modele teoretice : modelul soluției regulare, modelul cvasichimic, modelul atomului înconjurat etc. care încearcă să stabilească o legătură între proprietățile termodinamice ale aliajelor lichide și structura acestora.

Astfel, de exemplu, modelul soluției regulare descrie o soluție de substituție în care fiecare atom este înconjurat de z vecini apropiați, z fiind același pentru orice atom central.

Deoarece soluția nu e considerată ordonată entropia de amestec are aceeași valoare ca în soluțiile ideale : $\Delta S^{am} = k \ln w$.

---

* Conf. dr. ing., catedra Metalurgia metalelor neferoase

Într-un sistem binar entalpia molară de amestec este dată de relaţia [9]:

$$\Delta H_M^{am} = P_{12}(\varepsilon_{12} - 0{,}5\ \varepsilon_{11} - 0{,}5\ \varepsilon_{22}) =$$

$$= 2\ x_1 x_2 (0{,}5\ z\ N_0)(\varepsilon_{12} - 0{,}5\ \varepsilon_{11} - 0{,}5\ \varepsilon_{22}) = Q\ x_1 x_2 \qquad (1)$$

în care:

P_{12} reprezintă numărul de perechi de atomi diferiţi care formează combinaţii de tipul 1—2;

ε_{11}, ε_{12} şi ε_{22} — energiile de legătură corespunzătoare perechilor de atomi 1—1, 1—2 şi 2—2;

$Q = z\ N_0(\varepsilon_{12} - 0{,}5\ \varepsilon_{11} - 0{,}5\ \varepsilon_{22})$ — energie de amestec;

x_1, x_2 — fracţiile atomice ale componenţilor aliajului;

N_0 — numărul lui Avogadro,

iar relaţiile de calcul ale coeficienţilor de activitate sînt de forma:

$$RT \ln \gamma_1 = x_2^2 Q \qquad (2)$$

$$RT \ln \gamma_2 = x_1^2 Q. \qquad (3)$$

Relaţiile (2) şi (3) pot fi utilizate ca o primă aproximare în estimarea proprietăţilor termodinamice ale aliajelor binare, în unele cazuri, cum ar fi de exemplu sistemul Pb—Bi, rezultatele fiind satisfăcătoare: $\lg \gamma_{Pb} = -0{,}32\ (1 - x_{Pb})^2$, $\lg \gamma_{Bi} = -0{,}32\ (1 - x_{Bi})^2$.

Un pas înainte în perfectarea modelului matematic al soluţiei regulare s-a realizat în cadrul conceptului de soluţie subregulară, în care, spre deosebire de soluţiile regulare se ţine cont de neaditivitatea legăturilor dintre atomi diferiţi. Deoarece şi în acest caz soluţia nu e considerată ordonată entropia de amestec are aceeaşi valoare ca în soluţiile ideale: $\Delta S^{am} = k \ln w$.

Se consideră că energia de interacţiune corespunzătoare perechii de atomi 1—2 diferă de ε_{12}, dacă atomul de tip 1 se găseşte în vecinătatea a doi atomi de tipul 2 ce sînt dispuşi într-un anumit mod în nodurile reţelei, probabilitatea unor astfel de grupări fiind egală cu $x_1 x_2^2$. În acest caz, din numărul total de legături P_{12} se scad

$$P'_{12} = 2\ x_1 x_2^2 (0{,}5\ z\ N_0) = x_1\ x_2^2 z N_0 \qquad (4)$$

legături care au energia $\varepsilon'_{12} \neq \varepsilon_{12}$, diferenţa $P_{12} - P'_{12}$ referindu-se la legăturile cu energia ε_{12}. Pe baza celor prezentate căldura molară de amestec va fi dată de relaţia:

$$\Delta H_M^{am} = (P_{12} - P'_{12})(\varepsilon_{12} - 0{,}5\ \varepsilon_{11} - 0{,}5\ \varepsilon_{22}) +$$

$$+ P'_{12}(\varepsilon'_{12} - 0{,}5\ \varepsilon_{11} - 0{,}5\ \varepsilon_{22}) \qquad (5)$$

$$\Delta H_M^{am} = P_{12}(\varepsilon_{12} - 0{,}5\ \varepsilon_{11} - 0{,}5\ \varepsilon_{22}) +$$

$$+ P'_{12}(\varepsilon'_{12} - \varepsilon_{12}). \tag{6}$$

Folosind P_{12} și P'_{12} din relațiile (1) și (4) și introducînd notația

$$q = z N_0 (\varepsilon'_{12} - \varepsilon_{12}) \tag{7}$$

se obține expresia :

$$\Delta H_M^{am} = Q\ x_1 x_2 + q\ x_1 x_2^2, \tag{8}$$

iar coeficienții de activitate sînt determinați cu ajutorul următoarelor relații :

$$RT \ln \gamma_1 = (Q - q)\ x_2^2 + 2\ q\ x_2^3 \tag{9}$$

$$RT \ln \gamma_2 = (Q + 2\ q)\ x_1^2 - 2\ q x_1^3 \tag{10}$$

Aplicînd relațiile (9) și (10) la unele sisteme binare ca de exemplu sistemele Cd-Zn și Ni—S,

$$\lg \gamma_{Zn} = 0{,}87\ x_{Cd}^2 - 0{,}30\ x_{Cd}^3\ ;\ \lg \gamma_{Cd} = 0{,}42\ x_{Zn}^2 + 0{,}30\ x_{Zn}^3, \tag{11}$$

$$\lg \gamma_{Ni} = -\ 8\ x_S^2 + 12\ x_S^3\ ;\ \lg \gamma_S = 10\ x_{Ni}^2 - 12\ x_{Ni}^3, \tag{12}$$

s-au obținut rezultate care concordă satisfăcător cu datele experimentale.

În cele ce urmează se propune un nou model, mai perfecționat, care ia în considerare faptul că în majoritatea aliajelor lichide apar elemente de ordine datorită neaditivității legăturilor dintre atomii de natură diferită. În acest context căldura de amestec se determină cu relația (8), iar entropia de amestec se calculează astfel :

$$\Delta S^{am} = k \ln w\ ;\ w = \frac{(N_1 + N_2 - m_1 - m_2)!}{(N_1 - m_1)!\,(N_2 - m_2)!} \cdot \frac{(m_1 + m_2)!}{m_1!\,m_2!}, \tag{13}$$

în care

$N_1 = n_1 N_0$ și $N_2 = n_2 N_0$ reprezintă numărul total de atomi de tipul 1, respectiv 2 ;

n_1, n_2 — numărul de atomi-gram de componenți 1 și 2 ;

N_0 — numărul lui Avogadro ;

m_1 și m_2 — numărul de atomi de tipul 1, respectiv 2, care formează grupări cu probabilitatea $x_1 x_2^2$, energia de legătură în cadrul acestor grupări fiind ε'_{12}.

Se consideră că

$$m_1 = \lambda N_1, \tag{14}$$

în care λ este un parametru structural ($\lambda \in [0, 1]$), iar între m_1 şi m_2 există o dependenţă care se presupune a fi de forma :

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{x_2^2}{x_1}. \tag{15}$$

$$m_1 = \lambda n_1 N_0 \; ; \; m_2 = m_1 \frac{x_2^2}{x_1} = \lambda N_0 \frac{n_2^2}{n_1 + n_2}. \tag{16}$$

Pentru a calcula entropia de amestec cu ajutorul relaţiilor (13) se apelează la aproximaţia lui Stirling :

$$\ln N! \simeq N \ln N - N. \tag{17}$$

$$\ln w = \ln(N_1 + N_2 - m_1 - m_2)! + \ln (m_1 + m_2)! -$$

$$- \ln(N_2 - m_2)! - \ln m_1! - \ln m_2 ! \tag{18}$$

Efectuînd toate calculele se obţine în final

$$\Delta S^{am} = k \ln w =$$

$$= R\left[n_1 + n_2 - \lambda\left(n_1 + \frac{n_2^2}{n_1 + n_2}\right)\right] \ln \left[n_1 + n_2 - \lambda\left(n_1 + \frac{n_2^2}{n_1 + n_2}\right)\right] +$$

$$+ R\left(\lambda n_1 + \lambda \frac{n_2^2}{n_1 + n_2}\right) \ln \left(\lambda n_1 + \lambda \frac{n_2^2}{n_1 + n_2}\right) -$$

$$- R(n_1 - \lambda n_1) \ln(n_1 - \lambda n_1) -$$

$$- R\left(n_2 - \lambda \frac{n_2^2}{n_1 + n_2}\right) \ln \left(n_2 - \lambda \frac{n_2^2}{n_1 + n_2}\right) -$$

$$- R \lambda n_1 \ln \lambda n_1 - R\lambda \frac{n_2^2}{n_1 + n_2} \ln \lambda \frac{n_2^2}{n_1 + n_2} \tag{19}$$

Entalpia liberă a sistemului binar ce conţine n_1 atomi-gram component 1 şi n_2 atomi-gram component 2 este dată de relaţia :

$$G = H - TS = n_1 H_1^0 + n_2 H_2^0 + \Delta H^{am} - T(n_1 S_1^0 + n_2 S_2^0 + \Delta S^{am}), \tag{20}$$

în care :

H_1^0, H_2^0 reprezintă entalpiile componenţilor puri 1 şi 2 ;

S_1^0, S_2^0 — entropiile componenţilor puri.

Din relația (8) se obține pentru căldura de amestec expresia :

$$\Delta H^{am} = (n_1 + n_2)\Delta H_M^{am} = Q\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2} + q\frac{n_1 n_2^2}{(n_1 + n_2)^2}$$

iar entalpia liberă a sistemului se determină astfel :

$$G = n_1 G_1^0 + n_2 G_2^0 + \frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2} Q + \frac{n_1 n_2^2}{(n_1 + n_2)^2} q -$$

$$- RT \left\{ \left[n_1 + n_2 - \lambda\left(n_1 + \frac{n_2^2}{n_1 + n_2}\right)\right] \cdot \ln\left[n_1 + n_2 - \lambda\left(n_1 + \frac{n_2^2}{u_1 + n_2}\right)\right] + \right.$$

$$+ \left(\lambda n_1 + \lambda\frac{n_2^2}{n_1 + n_2}\right) \ln\left(\lambda n_1 + \lambda\frac{n_2^2}{n_1 + n_2}\right) - (n_1 - \lambda n_1) \cdot$$

$$\cdot \ln(n_1 - \lambda n_1) - \left(n_2 - \lambda\frac{n_2^2}{n_1 + n_2}\right) \ln\left(n_2 - \lambda\frac{n_2^2}{n_1 + n_2}\right) -$$

$$\left. - \lambda n_1 \ln \lambda n_1 - \lambda\frac{n_2^2}{n_1 + n_2} \ln\lambda \frac{n_2^2}{n_1 + n_2}\right\}. \qquad (21)$$

Derivînd relația (21) în raport cu n_1 și n_2 se obțin potențialele chimice ale componenților 1, respectiv 2.

$$\left(\frac{\partial G}{\partial n_1}\right)_{n_2, P, T} = \mu_1 = G_1^0 + RT \ln x_1 + x_2^2 Q + (2x_2^3 - x_2^2) q +$$

$$+ RT \{(1 - \lambda) \ln(1 - \lambda) + (\lambda - 1 - \lambda x_2^2) \ln[1 - \lambda(x_1 + x_2^2)] -$$

$$- \lambda(1 - x_2^2) \ln(x_1 + x_2^2) + \lambda x_2^2 \ln(1/x_2 - \lambda)\} \qquad (22)$$

$$\left(\frac{\partial G}{\partial n_2}\right)_{n_1, P, T} = \mu_2 = G_2^0 + RT \ln x_2 + x_1^2 Q + 2x_1^2 x_2 q +$$

$$+ RT\left[(1 - \lambda + \lambda x_1^2) \ln \frac{1 - \lambda x_2}{1 - \lambda(x_1 + x_2^2)} + \right.$$

$$\left. + \lambda(1 - x_1^2) \ln \frac{x_2}{x_1 + x_2^2}\right]. \qquad (23)$$

Deoarece

$$\mu_1 = \mu_1^0 + RT \ln x_1 + RT \ln \gamma_1, \ (\mu_1^0 = G_1^0) \tag{24}$$

iar

$$\mu_2 = \mu_2^0 + RT \ln x_2 + RT \ln \gamma_2, \ (\mu_2^0 = G_2^0) \tag{25}$$

din identificarea relaţiilor (22) cu (24) şi (23) cu (25) rezultă :

$$\ln \gamma_1 = x_2^2(Q' - q') + 2\, x_2^3 q' + (1 - \lambda) \ln(1 - \lambda) -$$

$$- (1 - \lambda + \lambda\, x_2^2) \ln[1 - \lambda(x_1 + x_2^2)] -$$

$$- \lambda(1 - x_2^2) \ln(x_1 + x_2^2) + \lambda\, x_2^2 \ln(1/x_2 - \lambda). \tag{26}$$

$$\ln \gamma_2 = x_1^2(Q' + 2q') - 2\, x_1^3\, q' + (1 - \lambda + \lambda x_1^2) \ln \frac{1 - \lambda x_2}{1 - \lambda(x_1 + x_2^2)} +$$

$$+ \lambda(1 - x_1^2) \ln \frac{x_2}{x_1 + x_2^2}. \tag{27}$$

în care $Q' = Q/RT$; $q' = q/RT$.

Obs. : Pentru $\lambda = 0$, relaţiile (26) şi (27) se reduc la ecuaţiile (9) şi (10).

Relaţiile (26) şi (27) permit calcularea coeficienţilor de activitate în sistemele binare dacă se cunosc mărimile Q', q' şi λ, mărimi ce se pot stabili pe baza valorilor coeficienţilor de activitate pentru diferite compoziţii ale aliajului considerat.

În continuare ne propunem să aplicăm noul model de interacţiune la studierea proprietăţilor termodinamice ale aliajelor din sistemul Mg—Li.

Valorile coeficienţilor de activitate la diferite fracţii molare ale magneziului sînt trecute în tabelul 1 [10].

Calcularea mărimilor Q', q' şi λ se bazează pe aplicarea metodei celor mai mici pătrate, în acest sens alcătuindu-se funcţia :

$$\Phi = \sum_{i=1}^{11} (\tilde{y}_i - y_i)^2, \tag{28}$$

iar $\tilde{y} = \ln \gamma_K$, $(K = 1,2)$ se referă la valoarea experimentală a coeficientului de activitate respectiv (tab. 1).

Înlocuind pe $\tilde{y}_i$ cu una din funcţiile (26) sau (27), de exemplu (26) relaţia (28) devine :

$$\Phi = \sum_{i=1}^{11} \{x_2^2(Q' - q') + 2x_2^3 q' + (1 - \lambda) \ln(1 - \lambda) -$$

$$- (1 - \lambda + \lambda x_2^2) \ln[1 - \lambda(x_1 + x_2^2)] - \lambda(1 - x_2^2) \ln(x_1 + x_2^2) +$$

$$+ \lambda x_2^2 \ln(1/x_2 - \lambda) - \ln \gamma_1\} \tag{29}$$

Tabelul 1

Valorile coeficienților de activitate în sistemul Li—Mg la 1 000 K

$x_{Mg} = x$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\gamma_{Mg} = \gamma_2$	0,054	0,115	0,216	0,358	0,532	0,712 ±0,08	0,869	0,970	1,011	1,009	1,000
$\gamma_{Li} = \gamma_1$	1,000	0,962	0,861	0,728	0,589	0,464 ±0,05	0,365	0,298	0,265	0,270	0,332

Tabelul 2

Valorile mărimilor Q, q și Φ pentru diferiți λ

	λ										
	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,64	0,65	0,66
$-Q'$	3,231	3,278	3,332	3,396	3,474	3,568	3,688	3,845	3,745	3,761	3,777
q'	2,073	2,125	2,185	2,256	2,341	2,444	2,575	2,745	2,637	2,654	2,671
$\Phi \cdot 10^7$	164 337	133 192	102 225	72 245	44 573	21 418	6 599	7 169	4 411	4 313	4 419

Tabelul 3

Comparație între modelul soluției subregulare și modelul propus în prezenta lucrare

	$x_{Mg} = x_2$										
	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
γ_{Li} ec. (9)	1,000	0,952	0,836	0,694	0,558	0,446	0,363	0,308	0,280	0,279	0,314
γ_{Li} ec.(30)	1,000	0,968	0,871	0,733	0,588	0,460	0,363	0,298	0,266	0,271	0,331
γ_{Mg} e(10)	0,039	0,102	0,215	0,378	0,568	0,749	0,888	0,971	1,003	1,005	1,000
γ_{Mg} ec.(31)	0,066	0,115	0,209	0,351	0,530	0,716	0,872	0,971	1,010	1,009	1,000

Se derivează funcția (29) în raport cu Q', q' și λ și din anularea derivatelor parțiale $\partial\Phi/\partial Q' = 0$, $\partial\Phi/\partial q' = 0$ și $\partial\Phi/\partial\lambda = 0$ rezultă un sistem de trei ecuații cu trei necunoscute (Q', q', λ) a cărui rezolvare este dificilă. Pentru simplificarea calculelor care sînt laborioase și greoaie s-au dat valori parametrului λ ($\lambda \in [0, 1]$) și pentru fiecare valoare în parte s-au calculat mărimile Q' și q' cu ajutorul metodei celor mai mici pătrate, valorile obținute fiind centralizate în tabelul 2.

Valorile căutate λ, Q' și q' corespund minimului funcției Φ (tab. 2) care se obține pentru $\lambda = 0{,}65$: $\Phi_{min} = 0{,}0004313$; $Q' = -3{,}761$; $q' = 2{,}654$. Pe baza acestor date, se obțin valorile energiilor de amestec Q și q : $Q = RT\,Q' = -7\,473$ cal; $q = RT\,q' = 5\,273$ cal, iar relațiile (26) și (27) capătă următorul aspect :

$$\ln\gamma_{Li} = -6{,}415\,x_2^2 + 5{,}308\,x_2^3 -$$

$$-(0{,}35 + 0{,}65\,x_2^2)\ln(0{,}35 + 0{,}65\,x_1x_2) - 0{,}65(1 - x_2^2)\ln(x_1 + x_2^2) +$$

$$+ 0{,}65\,x_2^2\ln(1/x_2 - 0.65) - 0{,}367. \qquad (30)$$

$$\ln\gamma_{Mg} = 1{,}547\,x_1^2 - 5{,}308\,x_1^3 + (0{,}35 + 0{,}65\,x_1^2)\ln\frac{1 - 0{,}65\,x_2}{0{,}35 + 0{,}65x_1x_2} +$$

$$+ 0{,}65\,(1 - x_1^2)\ln\frac{x_2}{x_1 + x_2^2}. \qquad (31)$$

Ultimele două expresii sînt de preferat relațiilor (9) și (10), deoarece reprezintă mai fidel proprietățile termodinamice ale sistemului Li—Mg. Acest lucru se constată prin mai buna concordanță dintre valorile calculate (tab. 3) și valorile experimentale ale coeficienților de activitate (tab. 1).

Concluzii

În lucrare este propus un nou model de interacțiune aplicabil sistemelor binare. Modelul ia în considerare apariția unor elemente de ordine în aliajele lichide datorită neadităvității legăturilor dintre atomii de natură diferită, în acest context fiind definită o nouă mărime termodinamică, $\lambda(\lambda \in [0, 1])$, numită parametru structural.

— Ecuațiile modelului (26) și (27) au fost verificate în cadrul sistemului Li—Mg. S-a constatat o mai bună concordanță între valorile calculate și cele experimentale ale mărimilor termodinamice decît în cazul utilizării ecuațiilor modelului soluției subregulare [ecuațiile (9) și (10)].

— Modelul propus este o variantă perfecționată a modelului soluției subregulare, reducîndu-se la acesta în cazul $\lambda = 0$.

— Se consideră că modelul propus poate fi aplicat atît aliajelor binare cît și topiturilor ionice binare (zguri, mate, săruri topite), cu definirea corespunzătoare a energiilor de amestec Q și q și a parametrului structural λ.

BIBLIOGRAFIE

1. *M. Margules*, Sitzber. Acad. Wiss. Wien, Mathemat. Natur. W., 1895. AB/11, a Bd 101, S. 1 243—1 278.
2. *C. W. Bale, A. D. Pelton*, Met. Trans., 1974, v. 5, p. 2 323—2 337.
3. *V. M. Glazov, L. M. Pavlova*, Himicescaia termodinamica i fazoviie ravnovesia, Izd. Metallurghia, Moscva, 1981.
4. *N. Brouwer, J. A. J. Oonk*, Z. physik. Chem. Neue Folge, 1977, Bd. 105, H 3/1, S. 113—123.
5. *I. Fejes*, Funcții spline în teoria mecanismelor., Ed. Științifică și enciclopedică, București, 1981.
6. *Gh. Micula*, Funcții spline și aplicații. Ed. Tehnică, București, 1978.
7. *D. Taloi*, Utilizarea funcțiilor spline în calcule termodinamice, Buletinul Institutului Politehnic București, seria Metalurgie, tomul XLVIII, anul 1986.
8. *D. Taloi*, Utilizarea funcțiilor spline bicubice în calcule termodinamice referitoare la sistemele ternare, Buletinul Institutului Politehnic București, seria Metalurgie, tomul XLVIII, anul 1986.
9. *I. T. Srîvalin, O. A. Esin, I. P. Nikitin*, Termodinamiceskie svoistva rasplavov sistemî medi-nikeli-sera, Izv. V.U.Z., Țvetnaia metallurghia, 4, 1958.
10. *R. Hultgren, P. D. Desai și alții*, Selected Values of the Thermodynamic Properties of Binary Alloys, A.S.M., Metals Park, Ohio 44073, 1973.

On the Thermodynamics of Binary Alloys

This paper presents a new interaction model applicable to liquid alloys as well as to binary ionic systems.

By considering the fact that order elements occur in most melts due to the additivity of the bonds between atoms of various nature, this model represents an improved version of the subregular solution model.

The model is verified with good results on the Li—Mg system, by determining the mixing energies, Q and q, and the structural parameter λ.

C.Z. :669.18;621.746

MODELAREA FIZICĂ A PROCESULUI DE FORMARE A RETASURILOR ÎN PIESELE TURNATE DIN OȚEL

C. BRATU, L. SOFRONI, FL. ȘTEFĂNESCU*

În lucrare se prezintă rezultatele teoretice și experimentale privind modelarea fizică a proceselor de contracție (retasurii) în piesele turnate din oțel carbon. Pe baza teoriei similitudinii și a analizei dimensionale se stabilesc criteriile de modelare fizică a retasurii, precum și compoziția optimă a materialului de modelare.

Amplasarea corectă a maselotelor cu dimensiuni optime și crearea unor condiții în care golurile de retasură să se deplaseze în întregime în maselote trebuie să fie precedată — independent de calculele teoretice prealabile — de cercetarea piesei turnate în ce privește mărimea și dispunerea retasurilor concentrate și a porozităților (microretasuri și microsulfuri).

Dacă la fabricarea în serie a unor piese turnate de mici dimensiuni o astfel de cercetare nu provoacă mari greutăți, la fabricarea unor piese turnate de mari dimensiuni sau a pieselor turnate de serie mică ea duce la mari cheltuieli. Utilizarea unor materiale ușor fuzibile permite să se execute și să se taie o piesă turnată, identică ca formă cu cea din oțel, pentru a scoate în evidență influența diferiților factori tehnologici asupra mărimii și dispunerii retasurilor.

Această problemă se poate rezolva numai în cazul asemănării totale a procesului de formare a retasurilor în model cu cel din piesele turnate, pentru aceasta fiind necesar să se respecte condiții determinate — care pot fi obținute folosind teoria similitudinii.

La baza alegerii condițiilor de modelare, a fost luată ca primă aproximație pentru modelul fizic și matematic a procesului, formula Nehendzi — Ghirșovici pentru determinarea volumului total al retasurilor din piesele turnate.

$$V_r = \alpha_{Vl}(t_{ml} - t_l) + 0{,}5\ (\alpha_{Vl} + \alpha_{Vs}) \cdot \Delta t_K + \varepsilon^0_{VK} - 0{,}5 \cdot \alpha_{Vs}(t_s - t_{ms}) \quad (1)$$

în care : $\alpha_{Vl}(t_{ml} - t_l) = \varepsilon_{Vl}$ este contracția volumică a metalului lichid de la temperatura medie a metalului lichid t_{ml} în momentul solidificării (formarea unei pojghițe exterioare subțiri), pînă la temperatura lichidus t_l ; $0{,}5\ (\alpha_{Vl} + \alpha_{Vs}) \cdot \Delta t_K + \varepsilon^0_{VK} = \varepsilon_{VK}$ — contracția volumică totală la solidificarea aliajului în intervalul de solidificare $\Delta t_K = t_l - t_s$ și o contracție la schimbarea fazelor ε^0_{VK} ;

* Șef lucrări dr. ing. ; Prof. dr. ing. ; Asist. ing., catedra Turnătorie-agregate

— $\alpha_{Vs}(t_s - t_{ms}) = \varepsilon_{Vs}$ — contracţia metalului solid în perioada solidificării în intervalul de temperaturi, de la temperatura curbei solidus t_s pînă la temperatura medie a metalului solid în momentul terminării solidificării t_{ms};

— α_{Vl} şi α_{Vs} sînt coeficienţii contracţiilor volumice în stare lichidă şi solidă şi în intervalul de solidificare.

Valoarea temperaturilor t_{ml} şi t_{ms} depinde de condiţiile schimbului de căldură şi forma piesei turnate. Ele sînt caracterizate de curbele de distribuţie a temperaturilor pe secţiunea piesei turnate, din momentul începerii şi terminării solidificării. Formula (1) nu ţine cont de dilatarea piesei înainte de contracţie şi de asemenea nici de faptul că retasurile închise şi îndeosebi unele porozităţi sînt cauzate de gaze, de asemenea formula nu ţine cont de faptul că contracţia piesei turnate începe la o temperatură deasupra curbei solidus (temperatura t_0 în interiorul intervalului de solidificare).

La temperatura t_0 se formează o fază solidă continuă în care începe propriu-zis contracţia liniară a piesei turnate. În acest fel se consideră că contracţia liniară a piesei turnate, care intră în al treilea membru al formulei, se determină prin contracţia termică pură şi nu este o contracţie de turnare, care se determină prin factori tehnologici suplimentari.

Folosind teoria similitudinii fenomenelor fizice, introducem transformările de scară pentru toate valorile ce intră în ecuaţia (1).

$$\begin{aligned} V_r &= V_0 \cdot V; \quad \varepsilon^0_{VK} = V_0 \cdot A_k \\ \alpha_{Vl} &= \alpha_0 \cdot A_l; \quad \Delta t_K = \theta_0 \cdot T \\ \alpha_{Vs} &= \alpha_0 \cdot A_s; \quad t_{ml} - t_l = \theta_0 \cdot (T_{ml} - T_l) \\ t_s - t_{ms} &= \theta_0 \cdot (T_s - T_{ms}) \end{aligned} \tag{2}$$

În relaţia (2) prin literele cu indicele „o" sînt notate scara valorilor alese, iar cu litere mari valorile fără dimensiuni. La introducerea transformărilor (2) în (1) obţinem:

$$V_0 V = \alpha_0 \cdot \theta_0 \cdot A_l (T_{ml} - T_l) + 0{,}5\, \alpha_0 \cdot \theta_0 \cdot A_l \cdot \Delta T + \tag{3}$$
$$+ 0{,}5\, \alpha_0 \cdot \theta_0 \cdot A_s \cdot \Delta T + V_0 A_K - 0{,}5\, \alpha_0 \cdot \theta_0 \cdot A_s \cdot (T_s - T_{ms})$$

Pentru eliminarea scărilor din (3) este necesar ca:

$$V_0 = \alpha_0 \cdot \theta_0 \tag{a}$$

Ecuaţia de legătură (a) obţinută conţine trei scări două dintre acestea putînd fi luate la alegere:

$$\theta_0 = \Delta t_V; \quad V_0 = \varepsilon^0_{VK} \tag{b}$$

în acest caz din ecuația de legătură (a)

$$\alpha_0 = \frac{\varepsilon^0_{VK}}{\Delta t_K} \tag{c}$$

La substituirea (b) și (c) în (3) obținem :

$$V = \frac{Vr}{\varepsilon^0_{VK}} \; ; \quad A_K = 1 \tag{d}$$

$$A_l = \frac{\alpha_{Vl} \cdot \Delta t_K}{\varepsilon^0_{VK}} \; ; \quad T = 1 \tag{e}$$

$$A_s = \frac{\alpha_{Vs} \cdot \Delta t_K}{\varepsilon^0_{VK}} \tag{f}$$

$$(T_{ml} - T_l) = \frac{t_{ml} - t_l}{\Delta t_K} \tag{g}$$

$$(T_s - T_{ms}) = \frac{t_s - t_{ms}}{\Delta t_K} \tag{h}$$

S-au obținut 5 criterii de similitudine din care unul (d) nedeterminat, iar celelalte determinate ceea ce satisface condițiile teoremei π. Deoarece numărul total de valori care intră în ecuația (3) $n = 7$, iar numărul de variabile luate la alegere $k = 2$, atunci numărul total de criterii după teorema π este $n - k = 5$.

Ecuația (3) se poate transcrie sub următoarea formă

$$V = A_l(T_{ml} - T_l) + 0{,}5\, A_l + 0{,}5\, A_s - 0{,}5\, A_s(T_s - T_{ms}) + 1 \tag{4}$$

În acest fel folosind relația (1) se poate conchide că problema realizării similitudinii procesului de formare a retasurilor și a distribuției valorii totale a retasurilor după componentele acesteia se reduce la îndeplinirea relației (2) care asigură rezolvarea unică a ecuației (3), pentru oțel și compoziția modelului. În locul criteriului (f) este mai ușor să se ia criteriul $\frac{\alpha_{Vl}}{\alpha_{Vs}}$, care se obține prin împărțirea criteriului (c) la (f).

Acesta este mai simplu și de asemenea caracterizează mai complet mărimea volumului retasurii independent de influența exercitată asupra acestuia de ε^0_{VK} și Δt_K.

În fenomenele de similitudine, criteriile sînt numeric egale aceasta trebuind să se respecte și la modelarea procesului de formare a retasurilor.

Notînd mărimile ce se referă la oţel cu N, iar mărimile ce se referă la compoziţia modelului cu M se poate obţine egalitatea :

$$\left(\frac{\varepsilon^0_{VK}}{Vr}\right)^N = \left(\frac{\varepsilon^0_{VK}}{Vr}\right)^M \tag{5}$$

adică similitudinea părţii contracţiei, la modificarea stării de agregare, pentru volumul total de retasură se va obţine în cazul îndeplinirii următoarelor condiţii :

$$\left(\frac{\alpha_{Vl} \cdot \Delta t_K}{\varepsilon^0_{VK}}\right)^N = \left(\frac{\alpha_{Vl} \cdot \Delta t_K}{\varepsilon^0_{VK}}\right)^M \tag{6}$$

$$\left(\frac{\alpha_{Vl}}{\alpha_{Vs}}\right)^N = \left(\frac{\alpha_{Vl}}{\alpha_{Vs}}\right)^M \tag{7}$$

$$\left(\frac{t_{ml} - t_l}{\Delta t_K}\right)^N = \left(\frac{t_{ml} - t_l}{\Delta t_K}\right)^M \tag{8}$$

$$\left(\frac{t_s - t_{ms}}{\Delta t_K}\right)^N = \left(\frac{t_s - t_{ms}}{\Delta t_K}\right)^M \tag{9}$$

Condiţia (6) reflectă influenţa contracţiei termice (contracţia termică, pură, la micşorarea temperaturii fără a ţine cont de alţi factori) în intervalul de solidificare în raport cu ε^0_{VK}. Cu cît ε^0_{VK} este mai mare, cu atît este mai mică influenţa relativă a contracţiei termice din intervalul de solidificare asupra mărimii retasurii.

În cazul cînd ε^0_{VK}, α_{Vl} sînt date, odată cu creşterea intervalului de solidificare, creşte partea „contracţiei termice" asupra volumului retasurilor.

Condiţia (7) caracterizează gradul de diferenţiere a coeficienţilor contracţiilor în stare lichidă şi solidă. Cu cît această diferenţă este mai mare, adică cu cît este mai mare α_{Vl}, în raport cu α_{Vs}, cu atît este mai mare volumul retasurilor.

Condiţiile (8) şi (9) sînt legate de evacuarea căldurii la solidificare. Pentru a arăta mai clar influenţa intervalului de solidificare este necesar să se aibă în vedere variaţiile de temperatură în momentul atingerii temperaturii curbei lichidus. În locul condiţiilor (8) şi (9) avem :

$$\left(\frac{\delta t}{\Delta t_K}\right)^N = \left(\frac{\delta t}{\Delta t_K}\right)^M \tag{10}$$

$$\left(\frac{t_{ml} - t_l}{\delta t}\right)^N = \left(\frac{t_{ml} - t_l}{t}\right)^M \tag{11}$$

$$\left(\frac{t_s - t_{ms}}{\delta t}\right)^N = \left(\frac{t_s - t_{ms}}{\delta t}\right)^M \tag{12}$$

Condiţiile (10) — (12) caracterizează similitudinea cîmpurilor de temperatură din model şi epruvetă şi se îndeplinesc la respectarea similitudinii termice.

Dacă se consideră căldura degajată la solidificare ca fiind acumulată în întregime de formă şi transmiterea căldurii se face numai prin conductibilitate termică atunci condiţia egalităţii intensităţii evacuării de căldură pe suprafaţa exterioară a formei este exclusă.

În locul condiţiei de egalitate a intensităţii evacuării de căldură la suprafaţa de contact dintre piesa turnată şi formă, atît în model cît şi în piese are loc egalitatea :

$$\left(\frac{b_2}{b_1}\right)^N = \left(\frac{b_2}{b_1}\right)^M \tag{13}$$

în care:

b_2 şi b_1 sînt coeficienţii de acumulare a căldurii de către formă şi aliaj.

Folosind una din condiţiile teoriei similitudinii, că oricare combinaţie de criterii este un criteriu de similitudine se poate lua raportul condiţiei (13) ca o condiţie a egalităţii criteriilor căldurii latente de solidificare. În acest caz se obţine un nou criteriu

$$\frac{K_b}{K_s} = \frac{\dfrac{b_2}{b_1}}{\dfrac{L}{c \cdot \theta}} \tag{14}$$

care leagă intensitatea evacuării de căldură (K_b — criteriul raportului activităţii termice a formei şi piesei turnate) de conţinutul relativ de căldură a piesei turnate (K_s — criteriul căldurii de solidificare)

L — căldura latentă de solidificare ; c — căldura specială ;

θ — tempeatura medie la solidificare.

Condiţiile ce caracterizează influenţa convecţiei şi egalitatea raporturilor coeficienţilor de conductibilitate şi difuzibilitate termică ale aliajului şi formei, pot să nu fie luate în consideraţie separat, deoarece aceste mărimi intră în componenţa expresiei (14).

În final, pentru similitudinea termică la solidificarea oţelului în forme de nisip se obţin următoarele condiţii de modelare :

$$\left(\frac{K_b}{K_s}\right)^N = \left(\frac{K_b}{K_s}\right)^M \tag{15}$$

$$\left(\frac{\Delta t_{si}}{t_1}\right)^N = \left(\frac{\Delta t_{si}}{t_1}\right)^M \tag{16}$$

$$\left(\frac{l_i}{X_i}\right)^N = \left(\frac{l_i}{X_i}\right)^M \tag{17}$$

Condiția (16) arată influența supraîncălzirii relative atît pe model cît și pe piesă. Condiția (17) caracterizează similitudinea formei pieselor turnate din oțel și a celor din aliajul pentru modelare, dispunerea acestora la turnare și solidificare, condițiile identice de umplere. Mărimile li și X_i sînt parametrii geometrici de convergență ai modelului și piesei.

În condițiile de modelare deduse nu se reflectă influența curgerii topiturii în perioada de solidificare. În cazul cînd influența unei mărimi fizice oarecare nu se poate determina din ecuația procesului, la alegerea condițiilor de modelare se pot folosi valori fizice simple, care reflectă influența acestei mărimi asupra procesului. În acest caz în condiția modelării trebuie să se introducă criteriile de similitudine.

Curgerea topiturii în perioada solidificării depinde de mulți factori legați de proprietățile topiturii și de condițiile influenței exterioare. Aceasta poate fi caracterizată de fluiditatea în apropierea lui t_l și în intervalul de solidificare pînă la terminarea curgerii la o temperatură t_0, oarecare prin filtrarea fazei lichide prin scheletul cristalelor în creștere, fenomenele de capilaritate, timpul de menținere a topiturii în stare mobilă τ_0 pînă în momentul formării întregului schelet al fazei solide la t_0.

Similitudinea curgerii la oțel și compoziția pentru modelare se poate determina prin raportul creșterii fluidității la valori corespunzătoare ale supraîncălzirii relative.

Se poate considera că dacă la modificarea supraîncălzirii relative $\Delta t_{si}/t_0]$ se va modifica în aceeași măsură și creșterea fluidității, atunci legea modificării fluidității din cauza supraîncălzirii este aceeași și pentru oțel și pentru compoziția de modelare, prin urmare există similitudinea fluidității :

$$\left(\frac{\Delta f_1}{\Delta f_2}\right)^N = \left(\frac{\Delta f_1}{\Delta f_2}\right)^M \tag{18}$$

în care : Δf_1 și Δf_2 sînt creșterile mărimii fluidității la modificarea

$$\frac{\Delta t_{si1}}{t_0} \text{ și } \frac{\Delta t_{si2}}{t_0}.$$

Pentru a lua în considerația mai completă mișcarea topiturii în perioada solidificării, condiția (18) este rațional să fie completată cu condiția care reflectă timpul de menținere a topiturii în stare mobilă adică timpul de atingere a limitei de alimentare a centrului piesei turnate ca urmare a formării întregului schelet al fazei solide.

Acest timp τ_0, legat de cantitatea fazei solide separate, prin urmare și de diagrama stării și ritmul de cristalizare, de caracterul, mărimea și forma cristalelor formate de vîscozitate și tensiunea superficială a topiturii în perioada de solidificare a acesteia poate fi un indice sigur pentru calcularea procesului de deplasare a aliajului. Condiția modelării pentru reflectarea timpului de menținere a topiturii în stare mobilă se poate exprima prin egalitatea rapoartelor τ_0 la timpul total

de solidificare τ_s.

$$\left(\frac{\tau_0}{\tau 8}\right)^N = \left(\frac{\tau_0}{\tau_s}\right)^M \tag{19}$$

Condiția (19) caracterizează timpul de formare a întregului schelet al fazei solide și terminarea curgerii topiturii pentru alimentarea piesei turnate.

Cu cît τ_0 este mai mare în cazul aceluiași timp de solidificare (τ_s) cu atît condițiile de alimentare se îmbunătățesc și este dezvoltată retasura concentrată.

În concluzie, condițiile modelării fizice a procesului de formare a retasurilor sînt :

$$\left(\frac{\alpha_{Vl}}{\alpha_{Vs}}\right)^N = \left(\frac{\alpha_{Vl}}{\alpha_{Vs}}\right)^M$$

$$\left(\frac{\alpha_{Vl} \cdot \Delta t_K}{\varepsilon^0_{VK}}\right)^N = \left(\frac{\alpha_{Vl} \cdot \Delta t_K}{\varepsilon^0_{VK}}\right)^M$$

$$\left(\frac{K_b}{K_s}\right)^N = \left(\frac{K_b}{K_s}\right)^M \tag{20}$$

$$\left(\frac{\Delta t_{si}}{t_l}\right)^N = \left(\frac{\Delta t_{si}}{t_l}\right)^M ; \quad \left(\frac{\Delta f_1}{\Delta f_2}\right)^N = \left(\frac{\Delta f_1}{\Delta f_2}\right)^M$$

$$\left(\frac{\tau_0}{\tau_s}\right)^N = \left(\frac{\tau_0}{\tau_s}\right)^M ; \left(\frac{l_i}{X_i}\right)^N = \left(\frac{l_i}{X_i}\right)^M$$

La îndeplinirea acestor condiții se poate considera că procesele de formare a retasurilor, volumul acestora, dispunerea și distribuția lor vor fi asemănătoare atît în piesele turnate din oțel cît și în model.

Ca apreciere finală pentru respectarea condițiilor de modelare luate poate servi raportul dintre volumul retasurilor concentrate și volumul microretasurilor.

$$\left(\frac{V_{MR}}{V_{mr}}\right)^N = \left(\frac{V_{MR}}{V_{mr}}\right)^M \tag{21}$$

În acest caz ecuația criterială se va exprima sub forma :

$$\left(\frac{V_{MR}}{V_{mr}}\right) = f\left(\frac{\alpha_{Vl}}{\alpha_{Vs}} ; \quad \frac{\alpha_{Vl}\Delta t_K}{\varepsilon^0_{VK}} ; \quad \frac{K_b}{K_s} ; \quad \frac{\Delta t_{si}}{t_l} ; \quad \frac{\Delta f_1}{\Delta f_2} ; \right.$$

$$\left. \frac{\tau_0}{\tau_s} ; \quad \frac{l_i}{X_i}\right)$$

Respectarea condiţiilor de modelare deduse permite să se realizeze similitudinea formării retasurilor în model şi piesa care se solidifică în forme din amestec.

Condiţiile alese pot fi folosite pentru orice fel de aliaje care se caracterizează prin formarea retasurilor asemănător cu a oţelurilor carbon.

În tabelul 1 sînt prezentate caracteristicile de contracţie ale oţelurilor carbon şi ale unor amestecuri stearină-parafină şi stearină-ceară, iar în tabelul 2 caracteristicile termofizice pentru oţel şi stearină [2].

Tabelul 1

Caracteristicile de contracţie ale oţelurilor carbon şi ale unor amestecuri stearină-parafină sau stearină-ceară

Compoziţia	$\frac{\alpha_{Vl}}{\alpha_{Vs}}$	ε_{VK}	ε^0_{VK}	Δt_K	$\frac{\alpha_{Vl} \cdot \Delta t_K}{\varepsilon^0_{VK}}$
Oţel carbon C = 0,2 — 0,3 Mn = 0,35 — 0,65	1,67	3,25	3,0	32	0,107
Oţel carbon C = 0,3 — 0,4 Mn = 0,50 — 0,80	5,00	3,25	5,0	45	0,150
42% stearină + 58% parafină	1,10	9,10	8,80	3,2	0,0335
65% stearină + 35% parafină	1,39	7,90	7,66	2,5	0,032
60% stearină + 40% ceară	1,79	3,59	3,40	1,9	0,091
85% stearină + 15% ceară	1,60	3,26	3,00	3,8	0,115
65% stearină + 35% ceară	1,85	3,03	2,80	2,6	0,107

Tabelul 2

Caracteristicile termofizice pentru oţel carbon şi stearină

Materialul	T_{top} °C	λ, W/(m · K)	ρ, kg/m³	c, J/(Kg · K)	a, m²/s	L J/kg	β_V, %
Oţel carbon	1460...1500	33	7200	753	$6{,}11 \cdot 10^{-7}$	272000	2...5
Stearină	57	0,244	900	3230	$0{,}84 \cdot 10^{-7}$	150000	3...5

β_V — contracţia totală în volum

Pentru stabilirea compoziţiei optime de stearină-parafină care să dea un volum de retasură asemănător cu volumul de retasură din probele turnate din oţel, s-au respectat crireriile modelării fizice date de relaţia (20).

Criteriul geometric $\left(\frac{l_i}{X_i}\right)^N = \left(\frac{l_i}{X_i}\right)^M$ s-a stabilit astfel:

$$l_i^N = 200 \text{ mm}; \quad X_i^M = 100 \text{ mm}.$$

În cazul modelului s-a ales $l_i^M = 120$ mm, rezultînd $x_i^M = 60$ mm.

Criteriul intensității de răcire a aliajului, respectiv materialului de modelare a fost respectat:

$\left(\frac{K_b}{K_s}\right)^N = \left(\frac{K_b}{K_s}\right)^M = 0{,}52 \ldots 0{,}65$ prin alegerea coeficientului de acumulare a căldurii pentru model

— pentru forma din amestec

$$b_2 = 1750 \frac{\mathrm{W} \cdot \mathrm{s}^{1/2}}{\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{K}}$$ și pentru oțel $b_1 = 12\,000\ \mathrm{W} \cdot \mathrm{s}^{1/2}/\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{K}$

— pentru amestec stearină-parafină

$$b_1^M = 900\ \mathrm{W} \cdot \mathrm{s}^{1/2}/\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{K}$$

Folosind relația (14) rezultă:

$$\left(\frac{K_b}{K_s}\right)^N = \frac{\frac{1750}{12\,000}}{\frac{64}{0{,}18 \cdot 1485}} = 0{,}61$$

$$\left(\frac{K_b}{K_s}\right)^M = \frac{\frac{b_2^M}{900}}{\frac{30}{0{,}68 \cdot 36}} = 0{,}61; \quad b_2^M = 670\ \mathrm{W} \cdot \mathrm{s}^{1/2}/\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{K}$$

Deci, se poate alege pentru model ca material fie plexiglasul sau sticla organică, fie o formă din ipsos.

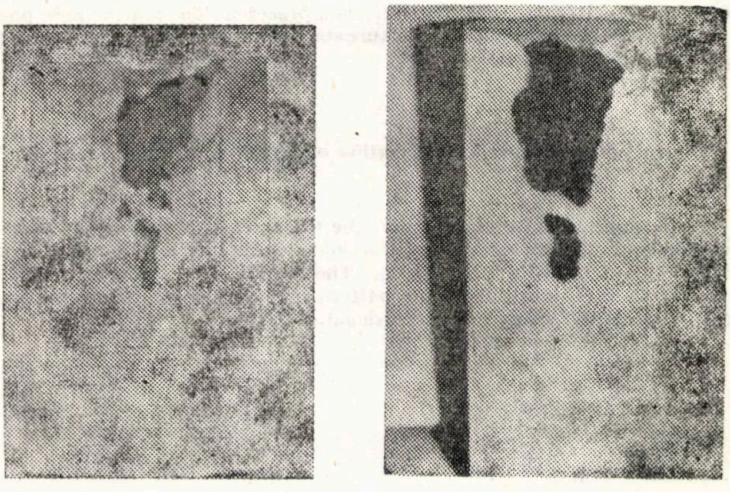


Fig. 1 — Forma retasurii pentru o probă cilindrică turnată din OT400 — 1 (a), respectiv turnată din materialul de modelare 82 % stearină —18% parafină într-o formă din ipsos

În figura 1 este prezentată forma retasurii pentru o piesă cilindrică turnată din amestecul de modelare 81% stearină — 18% parafină într-o formă din ipsos.

În figura 2 este prezentată forma retasurii pentru o probă cu nod termic turnată din OT450 — 2 (a), respectiv turnată din amestecul de modelare 85% stearină — 15% parafină, într-o formă din ipsos.

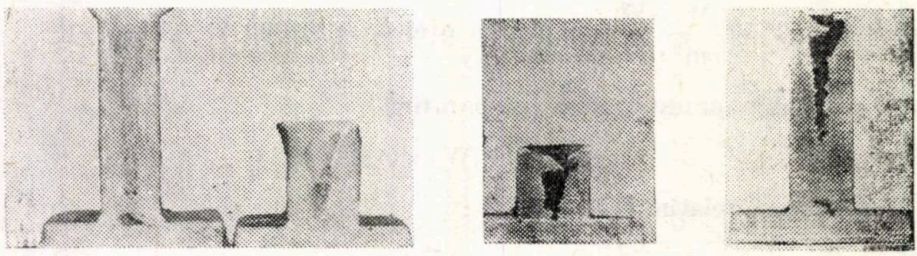


Fig. 2. — Forma retasurii pentru probă cu nod termic turnată din OT450—2 (a), respectiv turnată din amestecul de modelare 85% stearină — 15% parafină într-o formă din ipsos

Din rezultatele obținute, rezultă că amestecul din 82 — 85% stearină și 15 — 18% parafină poate fi folosit cu suficientă exactitate pentru modelarea retasurii și pentru studiul procesului de contracție a oțelurilor carbon din mărcile OT400—OT500.

BIBLIOGRAFIE

1. *C. Bratu, L. Sofroni, T. Sabău, Fl. Ștefănescu,* Modelarea fizică a proceselor de turnare litografiat I.P B , 1988.
2, *I. A. Nehendzi, V. T. Ivanov,* Modelarea fizică a proceselor de contracție în piesele turnate (lb. rusă). În culegerea : Aliaje turnate rezistente la cald, Ed. Metalurghia, 1968, p. 130—142.

Physical Modelling of the Formation of Shrinkage in Steel Castings

In the paper, the authors present the theoretical and experimental results of the physical modelling of the contraction process (formation of shrinkage) that take place in carbon steel castings. The criteria of the physical modelling and the optimum composition of the pattern material are determined with the help of the similarity theory and dimensional analysis.

C.Z. :669.35 :669.046.5

POSIBILITĂȚI DE PRELUCRARE A LIPITURILOR FORMATE ÎN CUPTORUL DE TOPIRE ÎN SUSPENSIE A CONCENTRATELOR CUPROASE

RODICA MURGULESCU, P. MOLDOVAN, GABRIELA POPESCU, C. MIRON *

În procesul de topire în suspensie a concentratelor cuproase, în cuptor apar lipituri. Aceste lipituri se prezintă sub formă de cruste și prafuri și provoacă deranjamente în procesul tehnologic.
În lucrare se prezintă prelucrarea acestor lipituri printr-o concentrare magnetică în mediu uscat. În urma acesteia se obțin două produse, unul sărac în magnetită, care se poate reintroduce în șarja de la topire și celălalt bogat în magnetită care se poate prelucra ulterior pentru recuperarea fierului și a celorlalte metale neferoase funcție de necesități.

1. Considerații generale

Concentratele cuproase în amestec cu piritele aurifere se prelucrează în vederea obținerii cuprului brut printr-o serie de procedee printre care se numără și procedeul de topire în suspensie. În general, se pot prelucra prin acest procedeu șarje cu compoziția următoare: 11.28%% Cu: 27—29% Fe; 32—35% S; 15—18% SiO_2; 2% Pb; 3% Zn. În urma procesului rezultă două produse, mata și zgura, primul fiind prelucrat în continuare în vederea obținerii cuprului, iar cel de-al doilea fiind un subprodus din care metalele utile se recuperează prin flotație.

În decursul procesului tehnologic care are loc în cuptorul de topire în suspensie în vatra cuptorului, pe pereții turnului de reacție, ai turnului de evacuare și în sistemul de desprăfuire se formează lipituri. Aceste lipituri se prezintă sub formă de cruste și prafuri care provoacă deranjamente în procesul tehnologic și trebuie înlăturate periodic. În prezent, aceste lipituri și prafuri se înlătură la reparațiile capitale ale cuptorului și se reintroduc în șarjă după o prealabilă măcinare.

Cantitativ ele nu reprezintă mult, dar conțin o cantitate variabilă de

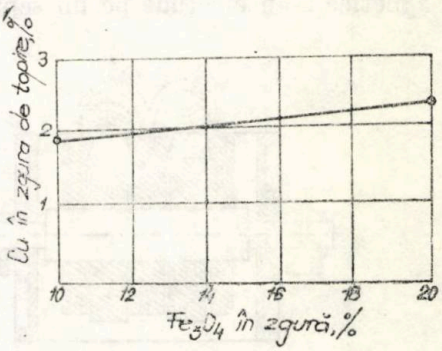


Fig. 1 — Dependența cuprului (%), în zgurile de la topirea în suspensie a concentratelor cuproase, de magnetită (%) în zguri

* Asist. ing.; Șef lucrări dr. ing.; Asist. ing., catedra Metalurgia metalelor neferoase

magnetită (15—45%) ceea ce îngreunează în plus procesul tehnologic. Din literatura de specialitate reiese influența negativă a conținutului de magnetită asupra pierderilor de cupru din zgură [3]. De aceea mărirea suplimentară a conținutului de Fe_3O_4, mai ales în cazul folosirii aerului îmbogățit în oxigen la topirea șarjelor de concentrații cuproase, duce la mărirea pierderilor de cupru în zgură [1] (fig. 1).

În lucrare sînt prezentate cercetări experimentale privind posibilitatea prelucrării lipiturilor din cuptorul de topire în suspensie prin concentrare magnetică.

2. Cercetări experimentale

Compoziția chimică a cîtorva probe constituente din lipiturile formate în cuptorul de topire în suspensie, în cursul procesului tehnologic, este prezentată în tabelul 1.

Tabelul 1

Compoziția chimică a lipiturilor din cuptorul de topire în suspensie

Proba	Compoziția chimică, %				
	Cu	Fe_3O_4	S	Zn	Pb
Proba 1	14,56	67,62	2,5	11,60	4,3
Proba 2	12,16	33,00	3,1	8,13	5,6
Proba 3	20,70	27,30	3,8	10,80	6,2

Din studiul mineralogic [4] a reieșit că în general fierul se găsește în mare măsură sub formă de magnetit și silicați, iar cuprul în cea mai mare parte sub formă metalică și combinat sub formă de calcozină.

Cercetările experimentale efectuate în vederea unei concentrări magnetice s-au efectuat pe un separator magnetic de laborator (fig. 2),

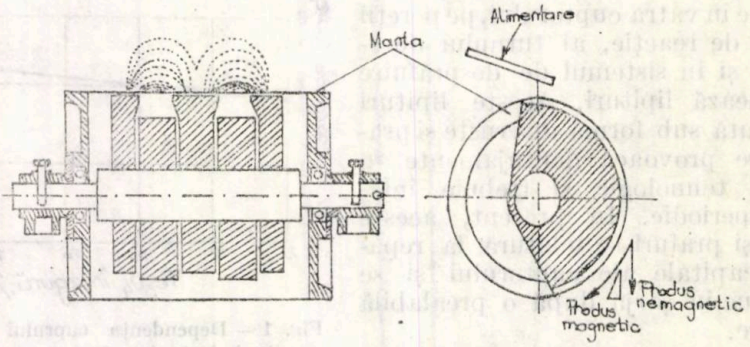


Fig. 2 — Schema instalației de laborator

cu alimentarea superioară a materialului, cu următoarele caracteristici: viteza de rotație 40 rot/min, rezistență 15,5 Ω, număr de spire 1 420, lungimea interferului 1,8 cm.

Greutatea probei cu care s-a efectuat separarea magnetică a fost de 100 g.

Forţa magnetică ce acţionează asupra unui grăunte mineral aflat în cîmp magnetic se poate exprima astfel [2]:

$$F = \frac{m_1 \cdot m_2}{\mu \cdot r^2},$$

în care:

m_1, m_2 — sînt masele magnetice ale grăunţilor respectivi;
r — distanţa între m_1 şi m_2;
μ — permeabilitatea magnetică a mediului.

Pe de altă parte energia potenţială înmagazinată într-un cîmp magnetic se poate exprima prin relaţia:

$$E = \chi_m V H \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}x},$$

în care:

V — volumul grăuntelui [m^3];
H — intensitatea cîmpului magnetic [A/m];
x — distanţa [m];
χ_m — susceptibilitatea magnetică a grăuntelui.

Din aceste relaţii rezultă că forţa magnetică este proporţională cu susceptibilitatea magnetică, cu intensitatea cîmpului şi cu gradul de neomogenitate al acesteia. Neomogenitatea cîmpului magnetic se poate realiza prin forma şi modul de amplasare a polilor magnetici. În timpul procesului de separare magnetică asupra granulelor acţionează atît forţe magnetice, cît şi mecanice, iar cînd separarea se face în mediu umed, la acestea se a adaugă forţele de frecare hidraulică.

Intensitatea cîmpului magnetic se poate calcula cu relaţia:

$$H = \frac{4\pi \cdot N \cdot I}{l}, \qquad [A/\mathrm{m}]$$

în care: N — numărul de spire;
I — intensitatea curentului, [A];
l — lungimea intrefierului, [m].

Avînd în vedere dimensiunile medii ale particulelor de magnetită şi cupru s-a efectuat în prealabil o măcinare, urmată apoi de o clasare. Proba supusă separării magnetice a avut granulaţia cuprinsă între 0,5 — — 1,5 mm.

Din rezultatele prezentate în tabelul 2 se poate observa că variaţia intensităţii curentului electric nu a avut o influenţă mare asupra modificării compoziţiei chimice a celor două produse rezultate: partea magnetică şi cea nemagnetică. Avînd în vedere conţinutul ridicat de magnetită din partea nemagnetică, materialul respectiv a mai fost supus în continuare la o nouă separare magnetică. Rezultatele experimentale obţinute în acest caz sînt prezentate în tabelul 3.

Tabelul 2

Variația compoziției chimice funcție de intensitatea curentului electric

Nr. crt.	Probal	Intensitatea curentului, (A)	Compoziția chimică, (%)	
			Cu	Fe_3O_4
1	Partea magnetică	1,5	7,8	51,76
	Partea nemagnetică		14,50	20,44
2	Partea magnetică	3,0	5,8	51,24
	Partea nemagnetică		13,52	25,36
3	Partea magnetică	6,0	6,46	57,76
	Partea nemagnetică		14,70	26,91

Cantitativ partea nemagnetică reprezintă circa 1/3 din partea magnetică. Patea magnetică obținută la a doua trecere (separare magnetică), nu a fost menționată în tabel deoarece formează produsul secundar, ea avînd un conținut mediu de cupru de 5—8%. Cu acest produs nu s-au făcut experimentări, în vederea utilizării lui și a recuperării metalelor neferoase și feroase conținute.

Totodată, menționăm că repartiția celorlalte metale neferoase existente în aceste lipituri nu a fost studiată.

Tabelul 3

Variația compoziției chimice în funcție de numărul de separări magnetice

Proba		Compoziția chimică, %		Nr. de separări magnetice
		Cu	Fe_3O_4	
1	Partea magnetică	7,8	51,76	1
	Partea nemagnetică	14,50	20,44	1
	Partea nemagnetică	20,30	0,56	2
2	Partea magnetică	10,30	68,15	1
	Partea nemagnetică	15,40	16,50	1
	Partea nemagnetică	25,60	0,25	2
3	Partea magnetică	11,30	55,30	1
	Partea nemagnetică	16,70	18,30	1
	Partea nemagnetică	28,10	0,50	2

Din analiza chimică reiese că ele se află sub formă oxidică sau poate metalică, conținutul de sulf fiind foarte mic. Avînd în vedere acest lucru s-a presupus că majoritatea lor se vor regăsi în produsul magnetic.

3. Concluzii

Din încercările experimentale prezentate se pot trage următoarele concluzii :

a. Lipiturile formate în timpul procesului de topire în suspensie conțin o cantitate mare de magnetită, ceea ce poate duce în cazul reintroducerii lor în șarjă la mărirea pierderilor de cupru în zgură.

b. Printr-o concentrare magnetică se poate obține un produs cu o cantitate foarte mică de magnetită, care se poate reintroduce în șarja destinată topirii în suspensie, avînd în vedere mai ales conținutul ridicat de cupru.

c. Prin folosirea unei concentrări magnetice în mediu umed cantitatea de cupru din produsul magnetic scade.

d. Partea magnetică obținută, deoarece are un conținut ridicat de cupru, se poate supune unui proces de flotație asemănător celui folosit pentru recuperarea cuprului din zguri.

e. Pentru recuperarea metalelor din partea magnetică (Fe_3O_4, Cu, Zn, Pb) se pot utiliza diferite tehnologii (de exemplu clorurarea sau un procedeu hidrometalurgic), acest lucru fiind obiectul cercetărilor noastre viitoare.

BIBLIOGRAFIE

1. *Fl. Oprea*, Procedee speciale în metalurgia neferoasă, București, Editura tehnică, 1975.
2. *I. Tocaci, ș.a.*, Mineralogie, vol. I, București, Editura tehnică, 1985 .
3. *Fl. Oprea, P. Moldovan*, Corelația dintre pierderile de cupru de la topirea concentratelor cuproase și conținutul de magnetită din zguri, Metalurgia *22*, 1970, nr. 4.
4. *R. Murgulescu, V. Macaleț*, Compoziția chimică și mineralogică a lipiturilor formate în procesul de topire în suspensie, Metalurgia *39*, 1987, nr. 10, pag. 508—510.

Ways of Processing the Solders Formed in Suspension Melting Furnace of Copper Concentrates

This paper presents the magnetic concentration, in dry medium, of solders formed in suspension melting furnace copper concentrates. This solders have the form of crusts and dusts and cause accidents in processing technology. From chemical point of view, they contain a high quantity of iron under the form of magnetite and non-ferrous metals as metals or chemical combinations. By the magnetic concentration two products are obtained; one with a small content of magnetite which is introduced in the melting charge and the other with a high content of magnetite, which is processing for iron and other non-ferrous metals recuperation.

C.Z. :669.15-194 :621.97.07

COMPORTAREA LA DEFORMAREA PLASTICĂ LA CALD A UNUI OȚEL MICROALIAT PENTRU CONSTRUCȚII METALICE, DE TIP Cr—Mo—B—V—Ni

MIHAIELA ISAC *

Lucrarea prezintă cercetări privind deformabilitatea la cald a unui oțel microaliat pentru construcții metalice. Ca metodă de cercetare este utilizată încercarea de răsucire la cald.

Dezvoltarea economică actuală cere oțelurilor pentru construcții metalice rezistențe tot mai ridicate în vederea reducerii în greutate a echipamentelor .Realizarea acestui deziderat presupune cercetări în vederea înțelegerii relațiilor microstructură — proprietăți, precum și cunoașterea în detaliu a transformărilor care au loc în timpul și după deformarea plastică la cald sau în timpul și după tratamentele termice aplicabile acestor oțeluri.

Pentru a asigura o combinație echilibrată a proprietăților de rezistență, tenacitate, sudabilitate, determinată de acțiunea combinată a mecanismelor de durificare specifice acestor oțeluri este necesară deci dirijarea corectă a proceselor de deformare plastică și tratamente termice. Un rol deosebit îl au și elementele de microaliere. Elementele de aliere sub formă de precipitate (carburi, nitruri, borocarburi, carbonitruri), pot să încetinească sau chiar să anuleze procesul de recristalizare la deformarea plastică la cald cu efecte importante asupra mărimii granulației și asupra transformării ulterioare a austenitei la răcire.

Procesele de precipitare din austenită pot continua și după deformarea plastică la cald, la răcire, sau în cadrul tratamentelor termice ulterioare deformării plastice, cu implicații majore asupra proprietăților acestor oțeluri.

Obiectivul lucrării de față îl constituie determinarea comportării la deformarea plastică la cald a unui oțel cu rezistență ridicată, slab aliat, microaliat cu bor și vanadiu, care este utilizat pentru construcții metalice, în starea finală de călire și revenire.

Deformabilitatea la cald, definită prin rezistența la deformare și plasticitate se determină — în cercetările de față — prin încercarea de răsucire la cald realizată pe o mașină de încărcat de tip SETARAM.

---

* Șef lucrări dr. ing., catedra Metalurgie fizică

Rezistența la deformare se exprimă prin momentul de răsucire, iar plasticitatea prin numărul de răsuciri pînă la rupere a unei epruvete cilindrice avînd dimensiunile zonei calibrate Ø6 ×50 mm și lungimea totală (inclusiv capetele filetate) de 100 mm.

Dezavantajul încercării de răsucire îl reprezintă faptul că viteza de deformare este variabilă pe secțiunea epruvetei, fiind maximă la suprafață și zero în centru. De aceea determinarea deformabilității și în special structura după deformare, trebuie luată în considerare pe un strat subțire la suprafața epruvetei.

Cercetările de față au fost realizate pentru viteza de răsucire de 275 rot/min, echivalentă cu o viteză de deformație de 1 sec^{-1}, pe intervalul de temperatură 800—1200°C, în mediu de argon (epruveta fiind plasată într-un tub de cuarț).

Epruvetele au fost încălzite în vederea deformării plastice la temperatura de 1300°C (cu viteză de încălzire de 100°C/min), cu menținere 30 minute la temperatura de încălzire, după care s-a realizat răcirea la temperatura de deformare cu o viteză de 50°C/min, menținere 5 minute pentru egalizarea temperaturii, apoi urmînd deformarea plastică.

După deformare probele au fost răcite în apă, în vederea conservării mărimii grăuntelui austenitic de la temperatura de sfîrșit de deformare.

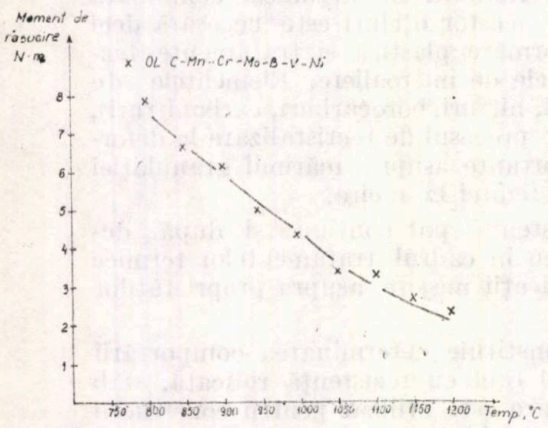


Fig. 1 — Variația rezistenței la deformare cu temperatura de încălzire

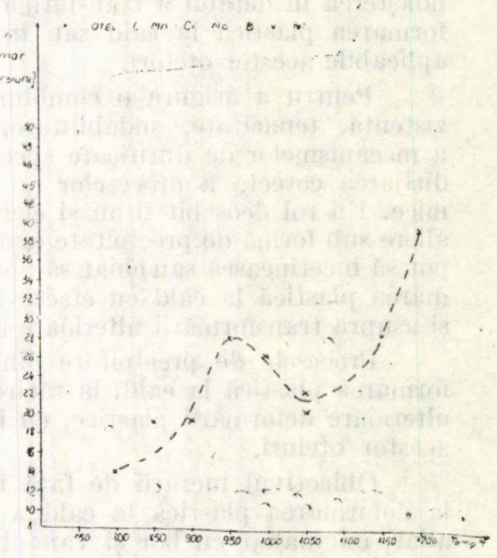


Fig. 2 — Variația plasticității cu temperatura de încălzire

În tab. 1 este prezentată compoziția chimică a oțelului cercetat iar în tabelul 2, respectiv fig. 1 și 2 sînt prezentate rezultatele încercărilor experimentale.

Tabelul 1

Compoziția chimică a oțelului C—Mn—Cr—Mo—B—V—Ni

Oțel tip	Analiza compoziției chimice pe :	Compoziția chimică (%)										
		C	Mn	Si	S	P	Cr	Mo	B	AL	V	Ni
C-Mn-	L	0,21	1,33	0,28	0,011	0,017	1,15	0,24	0,0029	0,051	0,08	0,75
Cr-Mo-B-V-	P_1	0,21	1,38	0,28	0,01	0,017	1,22	0,27	0,0031	0,043	0,06	0,72
Ni	P_2	0,21	1,37	0,27	0,01	0,017	1,21	0,25	0,0029	0,049	0,06	0,74

L — analiza compoziției chimice pe oțel lichid.

P_1, P_2 — analiza compoziției chimice la capetele produsului (corespunzătoare corpului și piciorului lingoului).

Tabelul 2

Nr. crt. încercare	Temperatura programată °C	Temperatură măsurată °C	Viteza de deformație s^{-1}	Numărul de torsiuni N	Moment de torsiune, Nm
1	800	800	1	14	7,912
2	850	847		19	6,794
3	900	986		19	6,106
4	900	900		18	6,278
5	950	948		28	4,902
6	1000	998		26	4,085
7	1000	1004		16	4,816
8	1050	1048		22	3,698
9	1050	1050		20	3,354
10	1100	1100		24	3,440
11	1150	1150		26	2,709
12	1200	1202	1	39	2,279

În fig. 3 a, b, c, d sînt prezentate micrografii ale structurii austenitice, realizate pe epruvete deformate plastic și răcite în apă de la temperatura de sfîrșit de deformare.

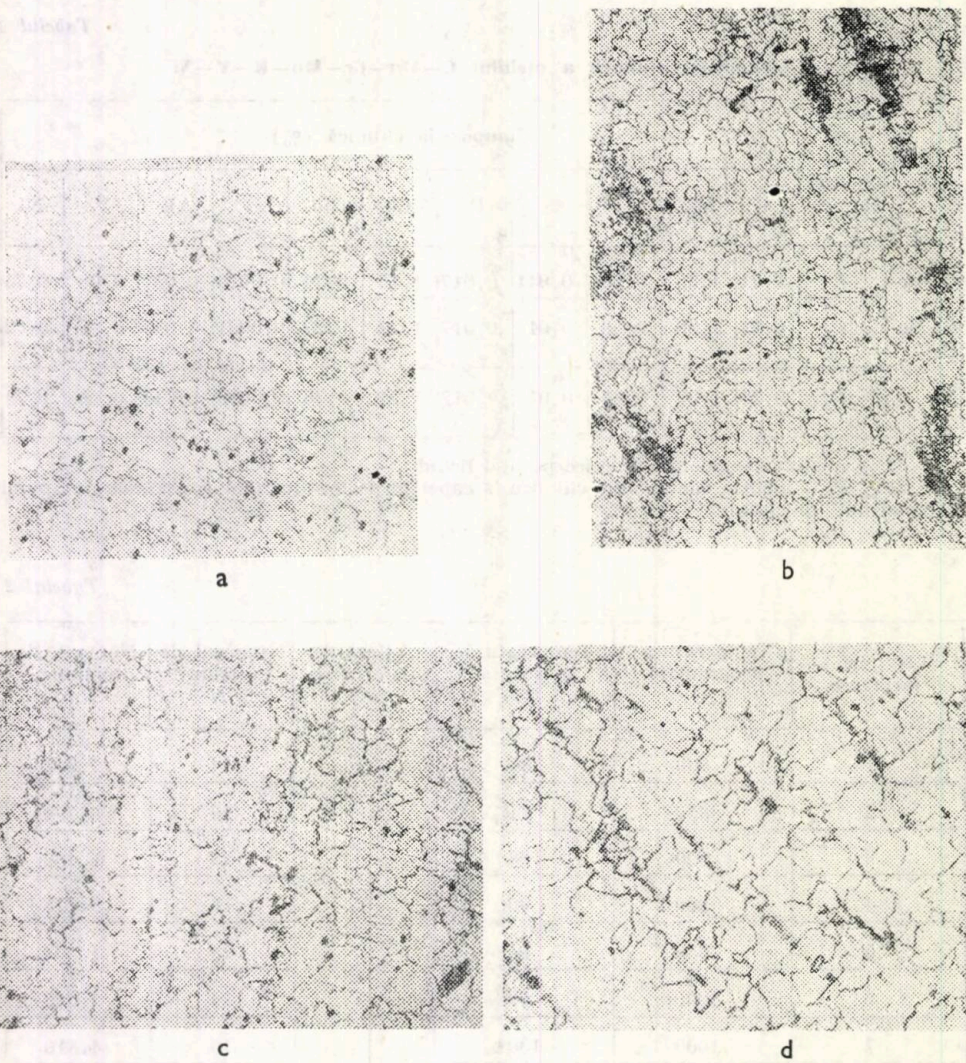


Fig. 3 — Oţel Cr—Mo—B—V—Ni. Mărimea grăuntelui austenitic după deformare la temperatura de :
a). 900°C — punctaj granulaţie austenitică 8—9 ;
b). 1004°C — punctaj granulaţie austenitică 9—10 ;
c). 1050°C — punctaj granulaţie austenitică 6—8 ;
d). 1100°C — punctaj granulaţie austenitică 6—7.
Probele au fost răcite în apă după deformare.
Mărire 200 : 1.

Avînd în vedere faptul că oţelul cercetat este utilizat sub formă de tablă groasă, cercetarea deformabilităţii trebuie să cuprindă şi analizarea posibilităţii de laminare la cald pornind de la datele furnizate de încercarea de răsucire la cald.

Echivalarea vitezei de deformație la răsucire cu viteza de deformație la laminare fără lățire

La răsucire (v. fig. 4) viteza de deformație $\dot{\gamma}_R$ este dată de relația :

$$\dot{\gamma}_R = \frac{d\gamma_R}{dt} = \frac{R}{L}\frac{d\theta}{dt}\ ; \quad \frac{d\theta}{dt} = 2 \cdot \pi \cdot N/\text{rad/min}/ = \frac{\pi \cdot N}{30},\ /\text{rad/sec}/$$

θ — deformația unghiulară

$$\dot{\gamma}_R = \frac{\pi \cdot RN}{30\,L}$$

Pentru $R = 3$ mm (raza epruvetei)
$L = 50$ mm (lungimea părții calibrate a epruvetei)
$N = 1500$ rot/min (viteza maximă de deformare la răsucire)

$$\dot{\gamma}_R = \frac{3 \cdot \pi \cdot 1500}{30 \cdot 50} = 4{,}5\ s^{-1}$$

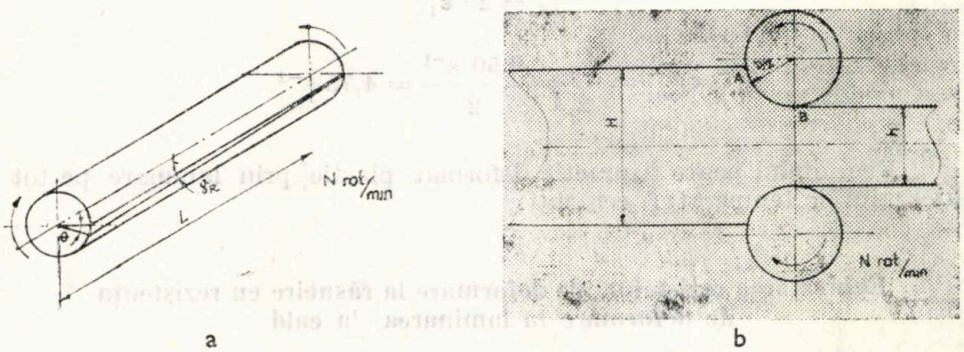


Fig. 4 — Deformarea plastică
a). prin răsucire ;
b). prin laminare fără lățire

La laminarea fără lățire, viteza de deformație este dată de relația :

$$\dot{\varepsilon}_l = \frac{d\varepsilon_1}{dt} = \frac{\Delta\varepsilon_1}{\Delta t} = \frac{\varepsilon_1}{t}$$

dar

$$\dot{\varepsilon}_1 = \ln\frac{H}{h}$$

unde :

$\dot{\varepsilon}_1$ — viteza de deformație la laminare ;

H — înălțimea laminatului înainte de deformare;
h — înălțimea după deformare;
t — timpul de deformare de la H la h, aproximativ egal cu timpul de parcurgere a distanței $A - B$ (v. fig. 4b), pe cilindrul de laminare:

$$\text{arc}\, AB = \sqrt{D/2(H-h)}$$

deci:

$$t = \frac{\sqrt{D/2(H-h)}}{\pi \cdot D} \cdot \frac{N}{60} \text{/sec/}$$

iar:

$$\dot{\varepsilon}_1 = 267{,}26 \ln \frac{H}{h} \frac{D}{N\sqrt{D(H-h)}}$$

viteza maximă echivalentă este dată de relația:

$$\gamma_R = 2 \cdot \varepsilon_1$$

$$\dot{\gamma}_R = 2 \cdot \dot{\varepsilon}_1$$

$$\dot{\varepsilon}_{1_{max}} = \frac{\dot{\gamma}_R}{2} = \frac{9{,}50\ s^{-1}}{2} = 4{,}75\ s^{-1}$$

Deci oțelul poate fi practic deformat plastic prin laminare pe tot intervalul de temperaturi cercetat.

Echivalarea rezistenței de deformare la răsucire cu rezistența de deformare la laminarea la cald

Pe baza criteriului de curgere (de plasticitate) a lui von Mises:

$$\sigma_C^2 = \frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma^1)^2]^{1/2}$$

și considerînd pentru deformarea prin răsucire

$$\sigma_1 = -\sigma_3 = \tau_R;\ \sigma_2 = 0$$

relația între limita de curgere σ_c și tensiunea tangențială la curgere în cazul forfecării este:

$$\sigma_c = \sqrt{3} \cdot \tau_R$$

dar :

$$\tau_R = (3{,}1 - 3{,}3)\frac{4M_t}{d^3}$$

unde :

M_t — moment de torsiune, doN. m.
d = diametrul epruvetei (mm).

Dar pentru răsucirea epruvetei de oțel Cr — Mo — B — V — Ni la temperatura de 800°C, $M_t = 7{,}9$ Nm.

$$\sigma_{e_{max}} = \frac{3M_t \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot \pi \cdot r^3} = 266{,}2 \text{ N/mm}^2.$$

$r = 3$ mm — raza epruvetei

Forța de laminare P și momentul de laminare M se determină cu relațiile :

$$P = \sigma_f \cdot F\,;\; M = 2\,Pa = 2P \cdot \varphi \cdot L_c$$

unde :

σ_c — tensiunea de curgere maximă la o trecere dată
ψ = 0,475 pentru cajele degrosisoare $D_0 - D_5$
ψ = 0,427 pentru cajele finisoare $F_1 - F_6$.

$$L_c = \sqrt{R_0(h_1 - h_2)}$$

$$F = \frac{2{,}3A \cdot (A-1) \cdot b \cdot L_c}{\left(-\frac{h_1}{h_2} - 1\right)(\delta - 1)}$$

$$A = \left[\frac{1 + \sqrt{1 + (\delta^2 - 1)\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^{\delta}}}{\delta + 1}\right]^{1/\delta}$$

$$\delta = \frac{2 \cdot f \cdot L_c}{h_1 - h}$$

$h = 3\,000$ mm lățimea tablei
$f_0 = 0{,}6$ coeficient de frecare.

Pentru cajele finisoare :

— considerînd $\Delta h = 6$ mm, $R_{0_{cilindru}} = 460$ mm

$$L_c = 52{,}53,\ \delta = 10{,}5\,;\ A = 1{,}15$$

— pentru $h_1 = 46$ mm

$h_2 = 40$ mm.

$$F = 43876{,}3 \text{ mm}^2.$$

Forța de laminare este :

$$P = \sigma_f \cdot F = 1166 \text{ tf}$$

Momentul de laminare este :

$$M = 2 \cdot P \cdot \psi \cdot L_c = 51{,}304 \text{ tfm}.$$

Forța maximă de laminare precum și momentul maxim de laminare determinate sînt inferioare forței maxime de laminare de 3500 tf și momentului maxim de laminare de 2×200 tfm specifice cajelor finisoare de la laminorul de tablă groasă de la C. S. Galați, ceea ce demonstrează posibilitatea practică a laminării în table groase a acestui oțel.

Concluzii

Din analiza curbelor de variație a rezistenței la deformare și plasticității din fig. 3 a, b se constată că rezistența la deformare exprimată prin momentul de răsucire pînă la rupere scade continuu cu temperatura de încălzire.

Plasticitatea exprimată prin numărul de torsiuni pînă la rupere crește în general cu creșterea temperaturii, cu excepția intervalului 970 — — 1050°C unde se înregistrează o scădere de aproximativ 15 % a plasticității. Scăderea plasticității se datorează desfășurării diferite pe aceste intervale a fenomenului de recristalizare asociat deformării plastice la cald, perturbare provocată de precipitarea nitrurilor și borocarburilor.

Mărimea grăuntelui austenitic real (exprimată prin punctaj) a fost determinată pe epruvetele deformate și răcite în apă, după atacuri repetate (și lustruiri repetate pe postav fin), cu o soluție formată din 4 g acid picric, 0,5 g Teepol și 100 ml apă la temperatura de 70°C, timp de atac 1 — 1,5 min.

Oțelul de tip Cr—Mo—B—V—Ni are o granulație austenitică foarte fină (punctaj 8 — 10) pentru deformarea plastică la temperaturi inferioare temperaturii de 1000°C, granulația acestuia crește accentuat pentru deformarea plastică la temperaturi situate în intervalul 1050 — 1100°C.

Deci oțelul Cr—Mo—B—V—Ni poate fi laminat la cald, cu temperatura de sfîrșit de deformare optimă de 900—950°C.

BIBLIOGRAFIE

1. *M. Isac*, Cercetări privind specificul transformărilor structurale și modificările de proprietăți la deformarea plastică si tratamentul termic al unor oțeluri microaliate — Teză de doctorat, I.P.B., 1986.
2. *F. B. Pickering*, The use of vanadium in low alloy steels, in the expanding field of high strength. Low Alloy steel, Viena, Union Carbide, nov. 1984.
3. *C. Rossard, P. Blain*, Une méthode de simulation par torsion permettant de déterminer l'influence sur la structure de l'acier de ses conditions de laminage à chaud, Publication IRSID, série A, nr. 217, sept. 1962.

La déformabilité à chaud d'un acier microallié pour les constructions métalliques de type Cr—Mn—B—V—Ni

L'article présent des recherches sur la déformabilité à chaud d'un acier microallié pour les constructions métalliques·

On utilise pour les recherches une méthode de torsion à chaud.

C.Z. :669.14 :621.784 621-272

FENOMENUL DE FRAGILITATE LA REVENIRE ÎN CAZUL UNOR OȚELURI PENTRU ARCURI

ALEXANDRA DOBRE, SIMONA ZAMFIR *

În lucrare se studiază fenomenul de fragilitate la revenire în cazul oțelurilor aliate pentru arcuri și metodele de prevenire a acestui fenomen.

În oțelurile aliate cu conținut mai ridicat elementele de aliere care formează carburi (Cr, V) se produce scăderea rezilienței prin încălzire la temperaturi între 500—650°C.

Obținerea unor valori foarte scăzute pentru reziliența prin încălzire la anumite temperaturi și prin răcire cu anumite viteze, reprezintă fenomenul de fragilitate de revenire.

Pe baza datelor cu ajutorul cărora se explică aspectele fragilității de revenire evidențiate la oțelurile aliate, se poate construi următorul tablou general al diferitelor feluri de fragilitate de revenire și al factorilor care le determină. Fenomenul de fragilitate la revenire se reprezintă schematic în figura 1.

În cazul oțelurilor aliate cu pînă la 0,6 %C se observă un interval de fragilitate în domeniul de temperaturi cuprinse între 250...450°C, iar al doilea între 500...650°C.

Fragilitatea de revenire cuprinsă între 250...450°C numită fragilitate de ordinul întîi se produce la revenirea oțelului în acest interval.

Fragilitatea de revenire care se produce la revenire la temperaturi mai mari de 500°C, în intervalul cuprins între 500° — 650°C se numește fragilitate de revenire de ordinul doi. Caracteristic pentru această fragilitate este faptul că ea apare numai dacă după revenire piesele sînt răcite lent.

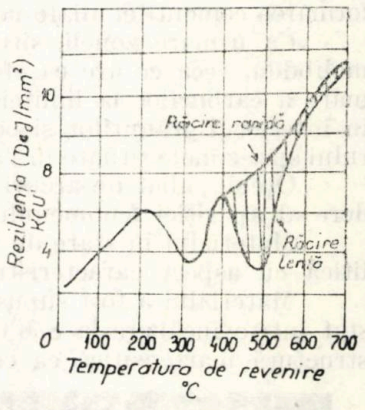


Fig. 1 — Fragilitatea de revenire

La răcire rapidă după revenire reziliența nu se micșorează ci crește monoton cu temperatura de revenire, după cum se observă din figura 1, dar fragilitatea reapare dacă după prima revenire se aplică o a doua revenire la temperaturi înalte urmată de o răcire lentă.

Pentru acest motiv această fragilitate se numește reversibilă.

* Șef. lucrări ing; Șef lucrări dr. ing., catedra Metalurgie-fizică

Fragilitatea de revenire reversibilă este caracteristică oțelurilor aliate, ea nu se produce la oțelurile carbon.

Oțelurile care conțin Cr, Mn, ca în cazul oțelului de arc 51VCr11A, prezintă fragilitate de ordinul doi.

Fragilitatea de ordinul doi este provocată de faptul că, la revenirea la temperatura înaltă formarea cementitei, saturarea ei în crom, mangan etc., și formarea carburilor elementelor de aliere, are loc cu viteze mai mari la limitele dintre grăunți decît în interiorul lor.

Ca urmare se produce sărăcirea în elemente de aliere a zonelor situate în vecinătatea limitelor de grăunți.

La răcirea lentă după revenire sau la menținerea în intervalul de temperaturi 500...550°C, zonele sărăcite în elemente care formează carburi are loc difuzia negativă a fosforului care face ca zonele din vecinătatea limitelor de grăunți, sărace în elemente de aliere, să se îmbogățească tot mai mult în fosfor în timp ce zonele situate în intervalul grăunților, bogate în elemente de aliere, să devină tot mai sărace în fosfor.

Ca rezultat al îmbogățirii în fosfor, zonele situate în vecinătatea limitelor dintre grăunți devin fragile.

O nouă revenire la temperaturi mai mari de 600°C, urmată de răcire cu viteză mare înlătură fragilitatea, deoarece reîncălzirea la temperaturi mai mari de 600°C, determină o redistribuire a fosforului în întreg volumul de material.

Influența favorabilă a molibdenului în proporții pînă la 0,6% care frînează sau înlătură complet fragilitatea de revenire reversibilă, se explică prin aceea că la astfel de concentrații molibdenul nu participă practic la formarea cementitei aliate neformînd nici carburi proprii.

Ca urmare zonele situate în vecinătatea limitelor nu sărăcesc în molibden, ceea ce are ca efect micșorarea diferenței între viteza de formare a carburilor la limitele grăunților și viteza de formare a acestora în interiorul grăunților și odată cu această împiedicare a difuziei fosforului spre zonele situate în vecinătatea limitelor dintre grăunți.

Oțelul aliat de arcuri 51VCr11A a fost studiat din punct de vedere al apariției fenomenului de fragilitate la revenire.

Materialul în stare de livrare prezintă o structură (fig. 2) ferito-perlitică cu aspect caracteristic după deformare plastică.

Materialul a fost supus unui tratament termic de călire care a constat într-o încălzire la 850°C urmată de o răcire în ulei, obținîndu-se o structură martensitică ca cea reprezentată în micrografia din figura 3.

Fig. 2 — Structura oțelului aliat pentru arcuri 51VCr11A în stare de livrare (Atac : nital ; mărire 200 : 1)

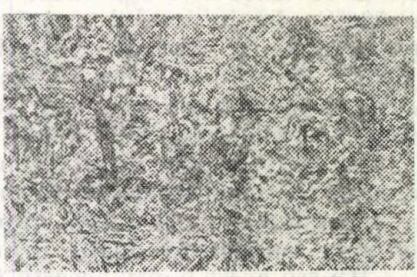


Fig. 3 — Structura în stare călită a oțelului pentru arcuri 51VCr11A (Atac : nital ; mărire 500 : 1)

După călire s-au efectuat mai multe reveniri, la temperaturi diferite măsurîndu-se după fiecare proprietățile mecanice obținute.

Se observă conform tabelului 1 valorile proprietăților mecanice în funcție de temperatura de revenire.

Tabelul 1

Proprietăți mecanice în funcție de temperatura de revenire

Temperatura de revenire	Duritate (HRC)	Rezistența mecanică R_m(daN/mm²)	Rezistența la curgere R_m(daN/mm²)	Alungirea A(%)	Gîtuirea Z(%)	Reziliența, KCU dJ/mm²
200	48	170	160	8	30	0,8
300	46	165,05	156,08	9	35	1,2
350	45	156,08	143,52	9,3	38,2	0,9
450	42	130,17	118,41	10	48,05	2,3
500	38	120,20	111,41	12,3	44,3	2,8
550	32	114,82	108,85	14,7	50,5	1,1

Structurile obținute în urma revenirii sînt în funcție de temperatură din ce în ce mai fine. La temperaturi joase (200°C) se observă o structură tip martenistică de revenire, figura 4, iar pe măsura creșterii temperaturii se observă structuri de tip amestecuri bifazice ferită și carburi, la temperaturi înalte observîndu-se coalescența carburilor, figurile 5, 6, 7, 8, 9.

Fig. 4 — Microstructura oțelului 51VCr11A călit și revenit la 200°C (Atac : nital ; mărire 500 : 1)

Fig. 5 — Microstructura oțelului 51VCr11A călit și revenit la 300°C (Atac : nital ; mărire 500 : 1)

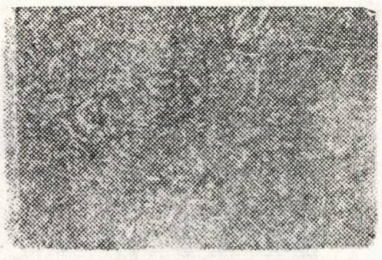


Fig. 6 — Microstructura oțelului 51VCr11A călit și revenit la 350°C (Atac : nital ; mărire 500 : 1)

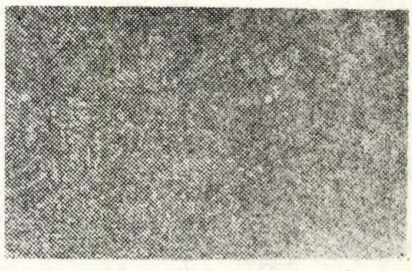


Fig. 7 — Microstructura oțelului 51VCr11A călit și revenit la 450°C

Dacă se trasează variația rezilienței în funcție de temperatura de revenire se observă două minime între 350—450°C și la 550°C, cînd oțelul prezintă fenomenul de fragilitate la revenire (fig. 10).

Fig. 8 — Microstructura oțelului 51VCr11A călit și revenit la 500°C. (Mărire 500 : 1)

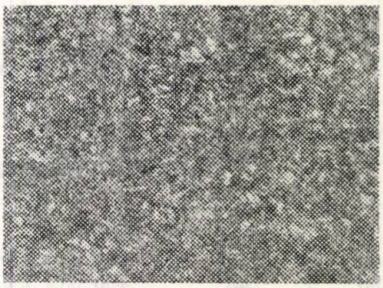


Fig. 9 — Microstructura oțelului 51VCr11A călit și revenit la 550°C. (Mărire 500 : 1)

Fenomenul de fragilitate la revenire mai este reliefat și printr-un atac chimic specific care pune în evidență precipitarea intergranulară a carburilor complexe.

Atacul chimic se execută la cald într-o soluție de 5 gr. acid picric + + 50 ml xilen + 5 gr. alcool etilic timp de 1/2 h.

Din figurile 11 și 12 se observă precipitatele închise la culoare, dispuse la limita grăunților.

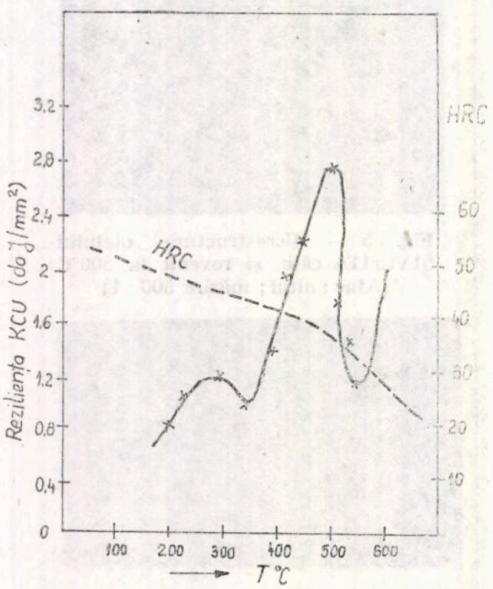


Fig. 10. — Variația rezilienței oțelului 51VCr11A în funcție de temperatura de revenire

Fig. 11 — Aspectul structural al oțelului 41VCr11A călit și revenit la 350°C

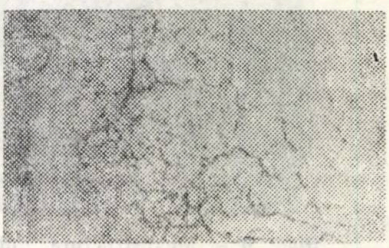


Fig. 12 — Aspectul structural al oțelului 51VCr11A călit și revenit la 550 °C

Concluzii

— Oțelul lot 51VCr11A pentru arcuri trebuie încălzit în vederea tratamentului termic în cuptor cu atmosferă controlată (cuptoare continui sau cu bazin integrat, sau cuptoare-băi de săruri încălzite cu electrozi în vederea prevenirii decarburării superficiale și oxidării superficiale).

— Oțelul 51VCr11A prezintă două intervale de fragilitate de revenire între 350—450°C și la temperaturi de 550°C.

— Fenomenul de fragilitate de revenire datorat precipitării intergranulare a unor faze, de tip carburi complexe (din cauza scăderii bruște o dată cu temperatura a solubilității carbonului în ferită) este ireversibil la temperaturi joase și trebuie evitată revenirea la aceste temperaturi.

BIBLIOGRAFIE

1. *A G. Rehstad*, Oțeluri pentru arcuri, Editura Metalurgică, Moscova, 1965.
2. *A. I. Zetob*, Probleme de proiectare și construcție a arcurilor, Ed. Metallurghizdat, 1960.
3. *N. Popescu, V. Vitănescu*, Tehnologia tratamentelor termice, Ed. Tehnică, 1974.
4. *T. Dulămiță, E. Florian*, Tratamente termice și termochimice, Ed. Didactică și pedagogică, 1982.
5. *J. Barferd, W. S. Oven*, I. Iron Steel Institute, v. 197, 1961, nr 2, pag. 146.

Le phénomène de fragilité de revenu des aciers alliés pour ressorts

L'étude porte sur le phénomène de fragilité de revenu des aciers alliés pour ressorts et sur les méthodes de prévention de celui-ci.

C.Z.: 669.716

COMPORTAREA ELEMENTELOR VOLATILE LA DEGAZAREA ÎN VID A ALIAJELOR DE ALUMINIU DESTINATE INDUSTRIEI AERONAUTICE

M. IENCIU, P. MOLDOVAN, C. DUMITRESCU,
N. PANAIT, LIDIA CRISTEA, GABRIELA POPESCU *

În lucrare se prezintă rezultatele cercetărilor experimentale privind tratarea în vid, în condiții statice, a aliajelor de aluminiu destinate industriei aeronautice.

Din datele cercetării s-au determinat vitezele de evaporare a magneziului și zincului, coeficienții de transfer de masă a acestora în baia metalică precum și eficiența eliminării hidrogenului.

Pe baza rezultatelor experimentărilor s-au evaluat condițiile practice de degazare statică în vid a aliajelor industriale.

1. Considerații generale

Tratarea în vid a aliajelor lichide de aluminiu constituie o alternativă practică, de mare perspectivă, pentru obținerea unor materiale de mare puritate, fără gaze, impurități metalice și incluziuni nemetalice sau intermetalice [1]. Scopul esențial al tratării în vid a aliajelor lichide pe bază de aluminiu îl constituie degazarea (eliminarea hidrogenului în special), creindu-se condiții și pentru evaporarea unor elemente volatile, care au la temperatura de lucru, tensiunea de vapori ridicată. Concomitent însă, cu eliminarea sodiului, care constituie o impuritate dăunătoare, cu tensiune mare de vapori, se produc și pierderi de elemente de aliere volatile: Mg, Zn ș.a. Lucrările publicate în literatură care abordează aceste probleme sînt limitate [2].

Degazarea aliajelor de aluminiu, care conțin sodiu, magneziu, zinc și alte elemente volatile este un proces complex care necesită încă un volum mare de cercetări. Dintre numeroasele procedee de degazare existente pe plan mondial, degazarea în vid cîștigă din ce în ce mai mult teren datorită, mai ales, lipsei poluării atmosferei [1, 3, 4].

În acest context lucrarea își propune abordarea unor aspecte cinetice și termodinamice a procesului de tratare în vid, în condiții statice, a aliajelor de aluminiu cu conținut de magneziu și zinc.

* Prof dr ing.; Conf. dr. ing.; Conf. dr. ing., Conf. dr. ing., Asist. ing., Asist. ing., catedra Metalurgia metalelor neferoase

2. Metodologia de investigare

Experimentările efectuate au avut drept scop studiul comportării magneziului și zincului din aliajele binare Al—Mg (cu 0,5...5 % Mg) și Al—Zn (cu 2,5...6 % Zn), aliajele ternare Al—Cu—Mg și cuaternare Al—Zn—Mg—Cu.

În prima etapă s-au elaborat, fără a se efectua degazarea, din metale pure (Al, Mg, Zn de puritate 99,7...99,99 %) și prealiaje (AlCu50),

Tabelul 1

Parametrii de lucru și conținutul elementelor volatile la tratarea în vid a aliajelor Al—Mg, Al—Zn, Al—Cu—Mg și Al—Zn—Mg—Cu

Nr. crt.	Compoziția aliajului	Parametrii procesului de tratare în vid			Conținutul*)	
		Temperatura, °C	Pres. remanentă min, mm Hg	Durata totală, min.	Inițial	Final
	I. *Aliaje Al—Mg*					
1	0,62% Mg	720	0,03	15	0,62	0,58
2	0,76% Mg	720	0,03	15	0,76	0,29
3	2% Mg	720	0,06	15	2,00	1,58
4	3,3% Mg	720	0,07	15	3,30	3,24
5	5% Mg	720	0,19	15	5,07	4,86
	II. *Aliaje Al—Zn*					
6	2,5% Zn	680	1,4	15	2,5	1,98
7	3,0% Zn	680	1,7	15	3,0	2,40
8	5,9% Zn	680	2,8	15	5,9	3,95
	III. *Aliaje Al—Cu—Mg*					
9	3,8% Cu 0,73% Mg	720	0,03	15	0,73	0,68
10	3,8% Cu 1,38% Mg	720	0,03	15	1,34	1,29
	IV. *Aliaje Al—Zn—Mg—Cu*					
11	6,7% Zn 2,8% Mg 2% Cu	710	6,0	15	6,70 2,80	6,50 2,70
12	6,2% Zn 2,9% Mg 1,9% Cu	710	5,8	15	6,23 2,90	6,00 2,81
13	5,8% Zn 2,55% Mg 1,8% Cu	710	5,7	15	5,80 2,57	5,57 2,46

*) Valori medii a cîte 3 experimentări

aliaje ale căror compoziții sînt date în tabelul 1, utilizîndu-se un flux de protecție cu 45 % NaCl, 45 % KCl și 10 % NaF. Elaborarea aliajelor s-a realizat într-un cuptor electric cu rezistoare de silită, în creuzete de

alumină sinterizată. Aliajele au fost turnate sub formă de bare, cu ∅ 30mm, fiind supuse strunjirii, decapării cu o soluție de NaOH 10 %, spălării cu alcool și uscării în etuvă. Atacul probelor șlefuite s-a realizat cu soluții de HF 1 %.

Tratarea în vid s-a realizat într-o instalație concepută și realizată pentru experimentări de laborator, avînd capacitatea maximă de 500 g aliaj de aluminiu. Schema de principiu a instalației de vidare este prezentată în figura 1.

O atenție deosebită s-a acordat etanșării perfecte a camerei de vid pentru a nu se produce aspirația aerului din exterior.

Răcirea cu apă a capacului camerei de vid asigură reținerea condensului de magneziu și zinc. Măsurarea și reglarea automată a temperaturii s-a realizat cu ajutorul unui termocuplu Pt—Pt—Rh 10 și a sistemului de reglare automată SRA—1.

Principalii parametri de lucru au fost temperatura și presiunea remanentă a gazelor din sistem, care s-au ales funcție de temperaturile de topire ale aliajelor și de tensiunile de vapori ale magneziului și zincului la temperatura de lucru.

După extragerea aerului, cu ajutorul pompei de vid, camera de lucru s-a spălat cu argon purificat în prealabil. Temperatura de lucru a fost de 720°C pentru aliajele Al—Mg și Al—Cu—Mg, de 680°C pentru aliajele Al—Zn și 710°C pentru aliajele Al—Zn—Mg—Cu. Durata de tratare în vid a fost de 10...15 min. (tab. 1). Pentru determinarea coeficienților de transfer de masă s-au efectuat determinări experimentale la duratele de 5, 10 și 15 minute.

După vidare, aliajele turnate sub formă de bare cu ∅ 30 mm, s-au supus determinării conținutului de hidrogen, magneziu și zinc.

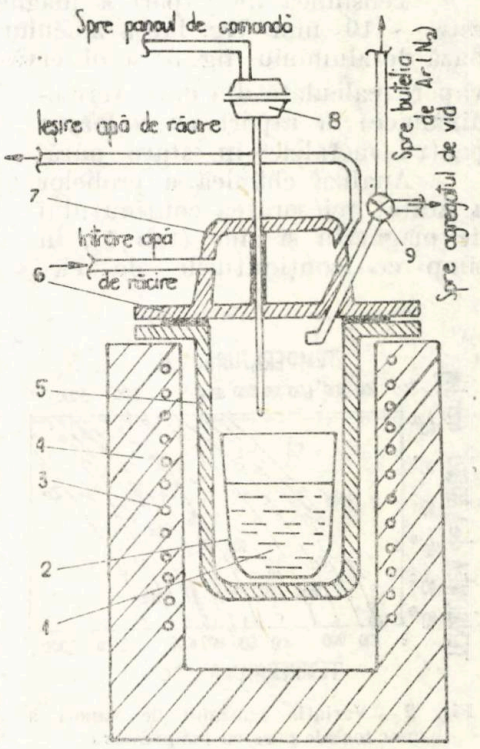


Fig. 1 — Schema instalației de turnare în vid a aliajelor de aluminiu:
1 — aliaj lichid; 2 — creuzet din alumină sinterizată; 3 — rezistență de încălzire (KANTHAL); 4 — cuptor electric cu rezistoare; 5 — cameră de vid din oțel inoxidabil; 6 — ecran de protecție; 7 — capac răcit cu apă; 8 — termocuplu Pt—Pt—Rh 10; 9 — robinet cu 3 căi

Analiza hidrogenului în probele inițiale și degazate s-a efectuat printr-o metodă originală pusă la punct în laboratorul de Metalurgie neferoasă din cadrul catedrei de Metalurgia metalelor neferoase și prepararea minereurilor din I.P.B. Metoda se bazează pe dozarea hidrogenului prin titrarea potențiometrică a clorului captat din instalație sub formă de acid hipocloros.

Pentru determinarea conținutului de magneziu și zinc s-a utilizat metoda spectrofotometrică.

3. Rezultatele experimentale, interpretarea lor și aplicabilitatea lor practică

Din dependența tensiunii de vapori a elementelor de temperatură (fig. 2) se observă că la cca 1 000 K tensiunea de vapori a aluminiului este $\sim 1 \cdot 10^{-7}$ mm Hg, iar pentru fier, siliciu, cupru, titan, zirconiu aceste valori sînt neînsemnate.

Tensiunea de vapori a magneziului pur la această temperatură este ~ 10 mm Hg, iar a zincului pur ~ 100 mm Hg. În aliajele pe bază de aluminiu (fig. 3) se observă o scădere pronunțată a tensiunii de vapori (calculată din date termodinamice) în raport cu valoarea pentru metalele în stare pură.

Analiza chimică a probelor a arătat micșorarea conținutului de magneziu și zinc (tab. 1), în timp ce conținuturile de elemente nevolatile (Mn, Fe, Cu, Ti, Si) practic au rămas neschimbate.

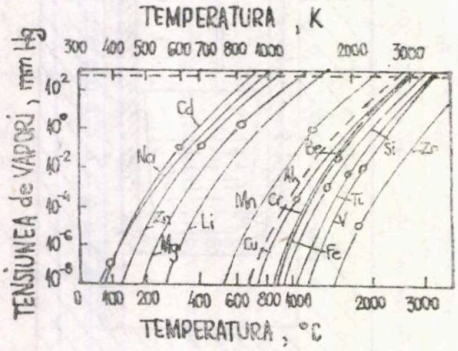


Fig. 2 — Variația tensiunii de vapori a unor metale pure cu temperatura

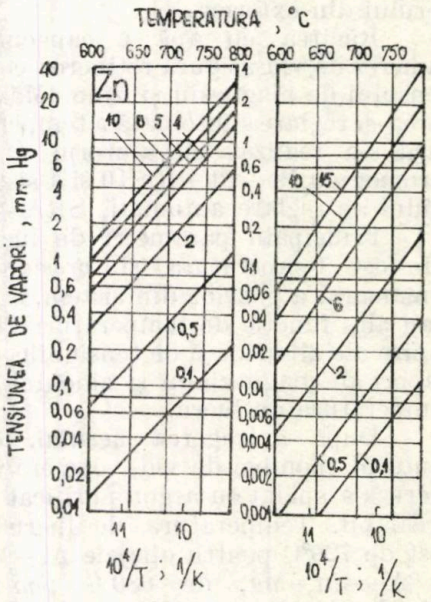


Fig.3 . — Dependența de temperatură a tensiunii de vapori a zincului și magneziului în aliajele binare lichide Al—Zn și respectiv Al—Mg. Cifrele de pe curbe arată conținutul de Zn (Mg) în aliajul binar, în % masice

Viteza teoretică de evaporare a metalelor, în regim molecular, am determinat-o cu ajutorul relației lui L a n g m u i r, care în vid este suficient de verosimilă :

$$v_i = 0{,}0583 \cdot \gamma_i \cdot x_i \cdot p_i \cdot \sqrt{\frac{M_i}{T}}, \quad \text{kg/m}^2 \cdot \text{s} \qquad (1)$$

în care :

v_i este cantitatea de metal (Mg. Zn) care se evaporă pe 1 m² suprafață de aliaj topit în decurs de 1 secundă ;

γ_i — coeficientul de activitate termodinamică a elementului în baia metalică;
x_i — fracţia molară a elementului;
p_i — presiunea de vapori a elementului, mm Hg;
M_i — masa moleculară a elementului, kg/kmol;
T — temperatura, în K.

În sistemele ternare şi mai ales cuaternare lipsesc, din literatură, datele termodinamice (γ_i) şi tensiunile de vapori. Unele date existente [5], privind coeficienţii termodinamici de interacţiune în aliajele ternare pe bază de aluminiu (ε_i^j), nu se referă la sistemul Al—Cu—Mg cercetat de noi.

Determinarea vitezei de evaporare practică s-a realizat cu ajutorul relaţiei:

$$v_i = (m_i - m_f) \cdot \frac{1}{A \cdot t}, \quad \text{kg/m}^2 \cdot \text{s} \qquad (2)$$

în care:

m_i şi m_f sînt masele de element volatil (Mg, Zn) înainte şi după evaporare, kg;
A — aria suprafeţei de evaporare a creuzetului,

$$(A \simeq 16 \cdot 10^{-4}\ \text{m}^2);$$

t — durata procesului de evaporare, s.

Rezultatele calculelor vitezelor de evaporare teoretice şi practice sînt prezentate în tabelul 2.

Tabelul 2

Coeficienţii de transfer de masă şi vitezele de evaporare a magneziului şi zincului din aliajele binare Al—Mg şi Al—Zn la tratarea în vid

Nr. aliajului	Marca aliajului	Concentraţia de echilibru a elementului de aliere, % masice	Coeficientul de transfer de masă în topitură a elementului de aliere, β cm/s		Viteza de evaporare, kg/m²·s	
			teoretic	practic	teoretic	practic
	I. *Aliaje Al—Mg*					
			β_{Mg}	β_{Mg}		
1	AlMg 0,62	0,25		$2{,}77 \cdot 10^{-4}$	$9 \cdot 10^{-8}$	$2{,}8 \cdot 10^{-5}$
2	AlMg 0,76	0,25		—	$9 \cdot 10^{-8}$	$3{,}3 \cdot 10^{-4}$
3	AlMg 2	0,75	$7{,}5 \cdot 10^{-3}$	—	$8{,}2 \cdot 10^{-7}$	$2{,}9 \cdot 10^{-4}$
4	AlMg 3,3	0,78		$9{,}8 \cdot 10^{-4}$	$1{,}1 \cdot 10^{-6}$	$4{,}1 \cdot 10^{-5}$
5	AlMg 5	2,37		$1{,}93 \cdot 10^{-4}$	$8{,}2 \cdot 10^{-6}$	$1{,}5 \cdot 10^{-4}$
				$\overline{\beta}_{Mg} = 4{,}8 \cdot 10^{-4}$		
	II. *Aliaje Al—Zn*					
			β_{Zn}	β_{Zn}		
6	AlZn 2,5	1,93		$5{,}8 \cdot 10^{-3}$	$3 \cdot 10^{-2}$	$3{,}6 \cdot 10^{-4}$
7	AlZn 3	2,34	$1 \cdot 10^{-2}$	$5{,}78 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-4}$	$4{,}1 \cdot 10^{-4}$
8	AlZn 5,9	3,81		$7{,}2 \cdot 10^{-3}$	$1{,}3 \cdot 10^{-3}$	$1{,}35 \cdot 10^{-3}$
				$\overline{\beta}_{Zn} = 6{,}3 \cdot 10^{-3}$		

Viteza procesului de evaporare a metalelor volatile (Mg, Zn) în timpul tratării aliajului lichid în vid, în condiții statice, este limitată de etapa cea mai lentă, respectiv de transferul de masă al acestor elemente din baia metalică spre suprafața de separare lichid-gaz.

Desfășurarea procesului de evaporare a elementelor volatile (Mg, Zn) din baia metalică în aceste condiții, este dată de relația :

$$-V_l \cdot d\,c_l = A \cdot \beta(c_l - L \cdot c_g)\ dt, \tag{3}$$

în care :

V_l este volumul aliajului lichid, cm^3 ;
c_l și c_g — concentrațiile de Mg sau Zn în faza lichidă, respectiv gazoasă (la un moment dat), % ;
A — suprafața de separație lichid-fază gazoasă, m^2 ;
β — coeficient de transfer de masă a Mg (Zn), cm/s ;
t — timpul, în s.

$$L = \frac{K_a}{K_d}\left(\frac{c_e}{c_g}\right)_{\text{echilibru}},$$

unde :

K_a și K_d sînt constantele proceselor de adsorbție, respectiv desorbție.

Integrînd relația (3) și ținînd seama că $Lc_g = c_e$, c_e fiind concentrația de echilibru a lichidului cu faza gazoasă, rezultă :

$$\ln\,(c_l - c_e) = -\frac{A_l \cdot \beta}{V_l} \cdot t + C_1 \tag{4}$$

Pentru $t = 0$, $c_l = c_{li}$ (c_{li} — concentrația inițială a Mg (Zn) la echilibru) și constanta de integrare $C_1 = \ln\,(c_{li} - c_e)$, rezultă :

$$2{,}3\ \log\frac{c_l - c_e}{c_{li} - c_e} = -\beta \cdot \frac{A_l}{V_l} \cdot t \tag{5}$$

Din reprezentarea grafică a ecuației (5) (cunoscînd $A \simeq 16$ cm^2 și $V \approx 80$ cm^3) s-a determinat coeficientul de transfer de masă β pentru Mg și Zn în aliajele Al—Mg și Al—Zn (tab. 2).

Concentrațiile de echilibru ale magneziului (Al—Mg) și zincului (Al—Zn) s-au determinat conform relațiilor (6) și (7) :

$$X_i = \frac{p_i}{p_i^0 \cdot \gamma_i^0} \tag{6}$$

unde : X_i este fracția molară a componentului i (Mg sau Zn) ;

$p_{Mg(Al-Mg)}$ și $p_{Zn(Al-Zn)}$ s-au determinat grafic din figura 3, iar γ_{Mg} și γ_{Zn} din datele lucrării [5] ;

$$\gamma_{Mg}^0 = 0{,}18 \quad \text{și} \quad \gamma_{Zn}^0 = 1{,}92.$$

$$[\%i] = \frac{X_i \cdot M_i}{X_i \cdot M_i + X_{Al} \cdot M_{Al}} \cdot 100,\ \% \tag{7}$$

De asemenea s-a calculat β din relaţia :

$$\beta = \frac{D}{\delta}, \tag{8}$$

unde : D este coeficientul de difuzie a Mg (Zn) în aluminiu lichid, cm^2/s ;

δ — grosimea stratului la limita lichid-gaz, cm, egal cu

$$\delta = \sqrt{D \cdot \tau}; \tag{9}$$

τ — durata curgerii convective la limita de separare a fazelor [6] :

$$\tau = \sqrt{\eta \cdot c/g \cdot \omega \cdot q}, \text{ s} \tag{10}$$

unde : η este vîscozitatea dinamică a aliajului, g/cm.s ;

c — căldura specifică a aliajului, cal/g. grad ;

ω — coeficientul de dilatare volumică a aliajului, $grad^{-1}$;

q — căldura medie, cal/cm^2 ; $\left(q = 4{,}96\left(\frac{T}{100}\right)^4\right)$.

Din datele existente în literatură s-a dedus pentru β_{Mg} (la $T = 720°C$) valoarea $7{,}5 \cdot 10^{-3}$ cm/s iar pentru β_{Zn} (la $T = 680°C$) valoarea $1 \cdot 10^{-2}$ cm/s (tab. 2).

Datorită convecţiei naturale în topitură îngreunată (prin încălzirea cu rezistoare situate deasupra topiturii) coeficientul de transfer de masă se micşorează :

$$\overline{\beta}_{Mg(practic)} = 4{,}18 \cdot 10^{-4} \text{cm/s}, \text{ iar } \beta_{Mg(teoretic)} = 7{,}5 \cdot 10^{-3} \text{ cm/s} ;$$

$$\overline{\beta}_{Zn(practic)} = 6{,}3 \cdot 10^{-3} \text{ cm/s}, \text{ iar } \beta_{Zn(teoretic)} = 1 \cdot 10^{-2} \text{ cm/s}.$$

La tratarea în vid se constată şi o scădere pronunţată a microporozităţii aliajelor (fig. 4 a, b).

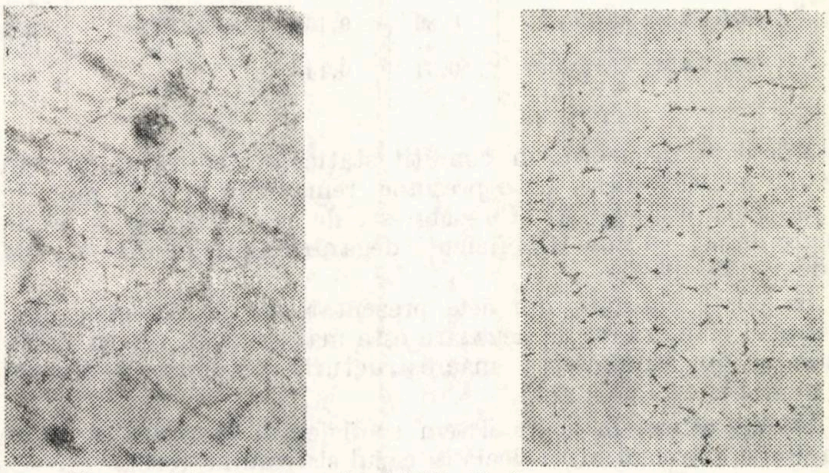


Fig. 4 — Microstructura aliajului Wl—Mg 3 :
a — înainte de tratarea în vid ; b — după tratarea în vid. Atac HF 1%, Mărire 100 : 1.

Din datele obținute în cadrul experimentărilor s-a constatat că la degazarea statică a aliajelor de aluminiu procesul de evaporare a metalelor volatile (Zn, Mg) se supune acelorași legi ca și procesul de eliminare a hidrogenului.

Eficiența (gradul) degazării s-a calculat din relația :

$$\eta_H = \frac{H_i - H_f}{H_i} \cdot 100 \ , \ \% \qquad (11)$$

în care : H_i și H_f reprezintă conținuturile de hidrogen inițiale înainte de degazare, respectiv finale (după tratarea în vid), în $cm^3/100$ g aliaj.

Scopul de bază al tratării în vid a aliajelor de aluminiu este, fără îndoială, eliminarea hidrogenului. Odată cu degazarea s-au produs pierderi de elemente de aliere volatile (Mg, Zn), așa cum se observă din tabelul 3 și figura 5.

Tabelul 3

Parametrii cinetici ai procesului de tratare în vid, în condiții statice, a aliajelor complexe Al—Cu—Mg și Al—Zn—Mg—Cu

Nr. aliajului	Marca aliajului	Conținutul de hidrogen, $cm^3/100g$		Coeficientul de transfer de masă în topitură a elementului de aliere, β cm/s	Viteza practică de evaporare, $kg/m^2 \cdot s$
		inițial	final		
	I Aliaje Al-Cu-Mg				
1	AlCu3,8Mg 0,73	0,30	0,16		$3,4 \cdot 10^{-5}$
2	AlCu3,8 Mg 1,38	0,32	0,17	$\bar{\beta} = 3 \cdot 10^{-4}$	$3,40 \cdot 10^{-5}$
	II. *Aliaje Al—Zn—Mg—Cu*				
3	AlZn 6,7 Mg 2,8 Cu 2	0,37	0,15	$\bar{\beta}$ Mg $= 6 \cdot 10^{-4}$	$1,4 \cdot 10^{-4}$ $6,9 \cdot 10^{-5}$
4	AlZn 6,2 Mg 2,9 Cu 1,9	0,36	0,16	$\bar{\beta} = 9 \cdot 10^{-3}$	$1,6 \cdot 10^{-4}$ $6,3 \cdot 10^{-5}$
5	AlZn 5,8 Mg 2,55 Cu 1,8	0,34	0,14		$1,6 \cdot 10^{-4}$ $7,6 \cdot 10^{-5}$

Eficiența degazării, în condiții statice, este destul de redusă în condițiile practice alese. La o presiune remanentă de 0,03 mm Hg eficiența degazării aliajelor Al—Cu—Mg este de cca 57%, iar la presiuni remanente de 5,7—6 mm Hg eficiența degazării aliajelor Al—Zn—Mg—Cu este de $\sim$ 55—65%.

Se poate constata din cele prezentate că în sistemele de aliaje care conțin zinc gradul de degazare este mai avansat, lucru ce se poate observa și din examinarea macrostructurii aliajului Al—Zn—Mg—Cu (fig. 6 a, b).

De asemenea, în acest sistem coeficientul de transfer de masă a magneziului este mai mare decît în cazul sistemului ternar Al—Cu—Mg

Vitezele de evaporare a zincului sînt mai mari decît ale magneziului, dar acceptabile pentru practică.

Viteza de eliminare a hidrogenului depășește viteza de evaporare a magneziului și zincului.

Studiile și cercetările la microsondă electronică au fost efectuate în vederea evidențierii principalelor modificări structurale precum și pentru identificarea principalelor faze intermetalice corespunzătoare acestui mod de prelucrare.

În figura 7 se prezintă imaginile de compoziție pentru aliajul AlZn6,2Mg2, 9Cu1,9 degazate în vid, imagine de ansamblu (a) și detaliu

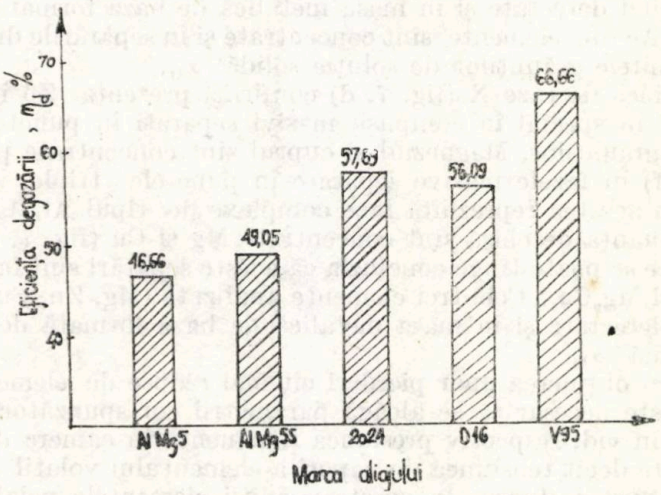


Fig. 5 — Eficiența degazării unor aliaje de aluminiu complexe

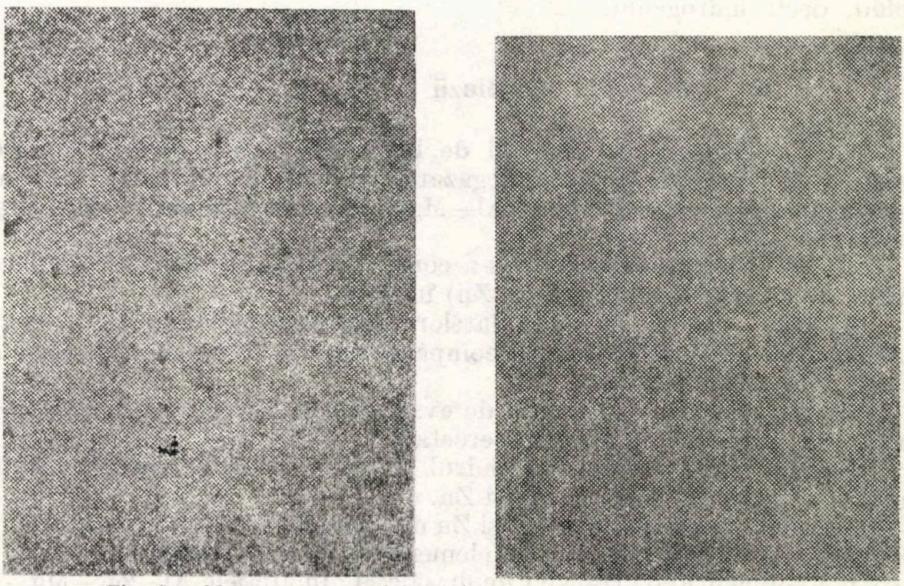


Fig. 6 — Macrostructura aliajului AlZn6,2Mg2,9Cu1,9 :
a — înainte de tratare în vid ; b — după tratare în vid. Mărire 30 : 1

(b). Structura de turnare este celulară, la limitele grăunților primari de soluție solidă α_{Al}, evidențiindu-se separări continue de compuși intermetalici și formațiuni de eutectic lamelar. O parte din compușii intermetalici sînt de formă lamelară cu continuitate avansată, o altă parte a acestora fiind evidențiate sub formă de separări masive în puncte triple de intersecție a grăunților primari de soluție solidă α_{Al}. După nuanță (alb, negru) se anticipează două tipuri de compuși intermetalici (fig. 7, b).

Analizele efectuate pe o direcție aleasă arbitrar (fig. 7, c) arată că în fazele separate la limitele de grăunți sînt concentrate Mg și Zn, aceste elemente fiind detectate și în masa metalică de bază formată din soluția solidă α_{Al}. Aceste elemente sînt concentrate și în separările din interiorul și de la limitele grăunților de soluție solidă α_{Al}.

Imaginea de raze X (fig. 7, d) confirmă prezența Zn în separările lamelare și în special în compușii masivi separați în punctele triple de întîlnire a grăunților. Magneziul și cuprul sînt concentrate preponderent (fig. 7, e, f) în fazele masive separate în punctele triple, împreună cu zincul, deci acestea reprezintă faze complexe de tipul $Al_kMg_xCu_yZn_z$. În fazele de nuanță deschisă sînt concentrate Mg și Cu (fig. 7, e, f), motiv pentru care se poate trage concluzia că aceste separări sînt faze complexe de tipul $Al_xMg_yCu_z$. Cele trei elemente analizate (Mg, Zn, Cu) au fost de asemenea detectate și în masa metalică de bază formată de grăunți de soluție solidă α_{Al}.

Pentru obținerea unor pierderi cît mai reduse de elemente volatile (Mg, Zn) este necesar să se aleagă parametrii corespunzători procesului de tratare în vid, respectiv presiunea remanentă în camera de vidare să fie mai mare decît tensiunea de vapori a elementului volatil (Mg sau Zn) la temperatura de lucru. În aceste condiții elementele volatile (Mg sau Zn) se vor elimina mult mai lent prin difuzie, din stratul superficial de lichid, decît hidrogenul.

Concluzii

a. S-a efectuat, în condiții de laborator, într-o instalație experimentală de concepție proprie, degazarea în vid în condiții statice a topiturilor din sistemele binare Al—Mg și Al—Zn, ternare Al—Cu—Mg și cuaternare Al—Zn—Mg—Cu.

b. Din analizele efectuate s-a constatat scăderea diferită a concentrației de elemente volatile (Mg, Zn) în timp.

c. S-au calculat pe baza datelor experimentale vitezele de evaporare practice a Mg și Zn și s-au comparat cu cele teoretice, calculate din relația lui Langmuir.

d. S-a constatat că viteza de evaporare a zincului este mai mare decît a magneziului, în aliajele cercetate.

e. Din datele obținute în cadrul lucrării s-au putut calcula coeficienții de transfer de masă ai Mg și Zn.

Procesul de eliminare a Mg și Zn din aliajele de aluminiu este limitat de transferul de masă al acestor elemente în baia metalică.

f. Coeficientul de transfer de masă a Mg în aliajele Al—Zn—Mg— Cu este mai mare decît în aliajele Al—Cu—Mg.

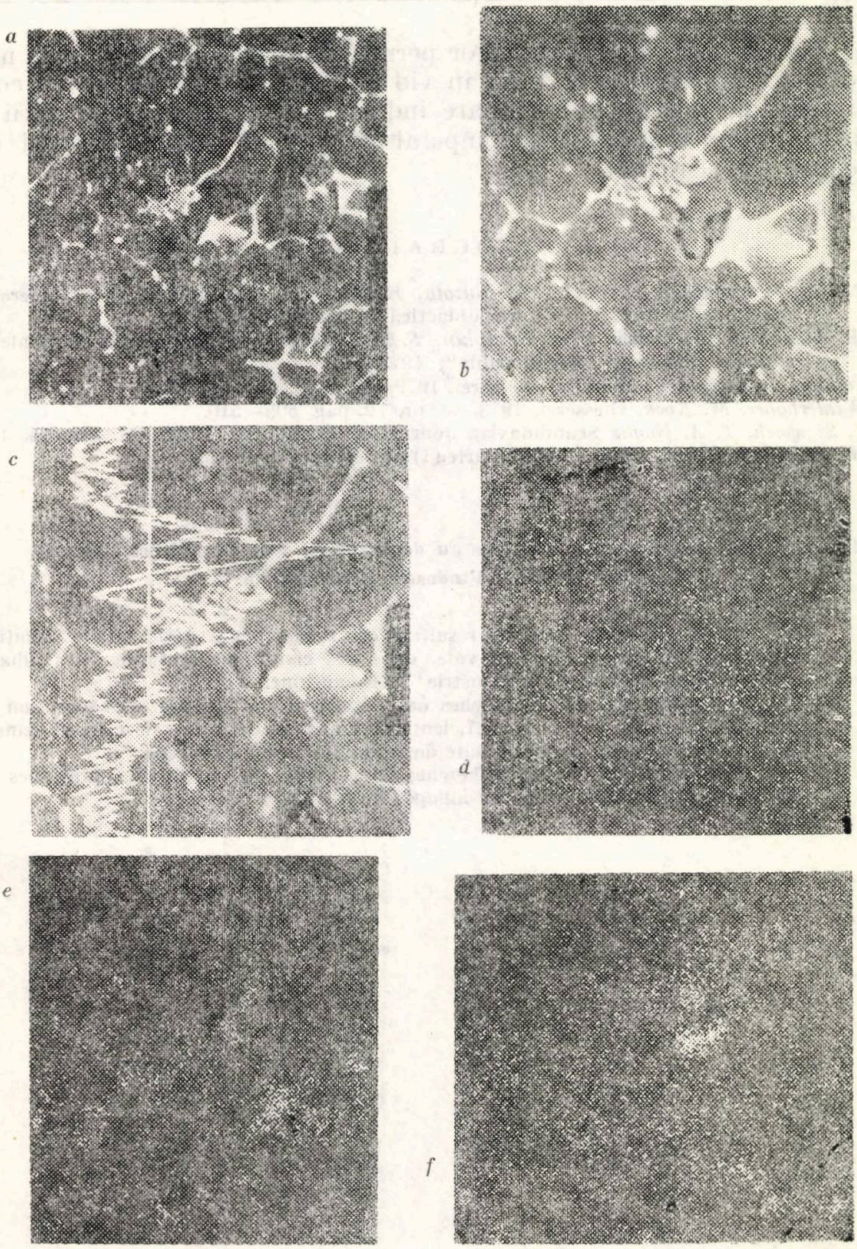


Fig. 7 — Studiul la microsonda electronică a aliajului AlZn6,2Mg2,9Cu1,9 elaborat în vid :

a — imagine de compoziție. Ansamblu. Mărire 300 : 1 ;
b — imagine de compoziție. Detaliu. Mărire 600 : 1 ;
c — imaginea de compoziție și profilele curbelor de variație a concentrației Mg și Zn pe direcția trasată. Mărire 600 : 1 ;
d — imaginea de raze X privind repartiția Zn în microzona din figura c ;
e — imaginea de raze X privind repartiția Mg în microzona din figura c ;
f — imaginea de raze X privind repartiția Cu în microzone din figura c.

g. Rezultatele experimentărilor permit evaluarea pierderilor de metale volatile (Mg, Zn) la tratarea în vid a aliajelor de aluminiu cu conținut de metale volatile în cuptoare industriale în vederea degazării și stabilirii presiunii remanente și temperaturii care să asigure pierderi cît mai reduse ale acestora.

BIBLIOGRAFIE

1. *M. Ienciu, P. Moldovan, N. Panait, M. Buzatu*, Elaborarea și turnarea aliajelor neferoase speciale, București, Editura didactică și pedagogică, 1985.
2. *M. B. Altman, E. B. Glotov, B. A. Zyxipkin, S. S. Makarov*, Vacuumirovanie aliuminievih splavov, Moskva, „Metallurghia", 1977.
3. *S. Kestner, I. Kruger, P. Winkler*, Giesserei, 1979, *66*, nr. 3, pag. 56—62.
4. *H. Winterhaher, M. Kock*, Giesserei, 1978, *65*, nr. 19, pag. 505—510.
5. *G. K. Sigworth, T. A. Engh*, Scandinavian Journal of Metallurgy, 1982, *11*, pag. 143 149.
6. *Th. Kraus*, Neue Hutte, 1972, *17*, nr. 10(partea I) și nr. 12 (partea a II-a).

Comportement des élémentes volatiles au dégazage en vide des alliages d'aluminium destinés à l'industrie aéronautique

L'ouvrage présente les résultats des recherches expérimentalles relativement au traitement dans le vide, dans des conditions statiques, des alliages d'aluminium destinés à l'industrie aéronautique.

Les données des recherches ont déterminé les vitesses d'évaporation du magnesium et du zinc, les coéfficients de transfert de masse de ceux-ci dans le bain métallique et aussi l'efficacité de l'élimination du hidrogène.

Vu les résultats des recherches on a évalué les conditions pratiques de dégazage statique en vide des alliages industriels.

C.Z.: 669.4:669.35
669.2/.8

PROCESE DE LICUAȚIE LA PRELUCRAREA PIROMETALURGICA A SCOARȚELOR CUPRO- PLUMBOASE REZULTATE LA DECUPRAREA PLUMBULUI BRUT

RODICA MURGULESCU, P. MOLDOVAN, GABRIELA POPESCU*

Încercările experimentale au urmărit îmbunătățirea compoziției aliajului obținut în procesul tehnologic industrial pentru obținerea a două faze cu conținuturi ridicate de metal (Pb sau Cu). Acest lucru s-a făcut prin studiul diagramei de echilibru Pb—Cu încălzind aliajul respectiv cu diferiți gradienți de temperatură. În urma experiențelor s-a obținut una din faze cu un conținut mediu de 94% Pb și 0,50% Cu.

1. Considerații generale

În epoca contemporană, avînd în vedere scăderea continuă a conținutului de metale în minereuri, se pune tot mai acut problema recuperării acestora din subprodusele obținute în diferite tehnologii.

Plumbul brut, obținut prin procedee pirometalurgice sau electrometalurgice, conține o serie de impurități (As, Fe, Zn etc.) și elemente însoțitoare utile (Au, Ag, Bi, Sb, Cu ș.a.). Pentru eliminarea impurităților și recuperarea elementelor utile, plumbul brut se supune unui proces de rafinare termică sau electrolitică.

Indiferent de procedeul de rafinare, în prima etapă se realizează operația de decuprare [1] a plumbului, care cuprinde două faze : decuprarea grobă (bazată pe procese de licuație) și decuprarea fină (care se bazează pe afinitatea mai mare a cuprului față de sulf decît a plumbului). În urma acestui proces se obține plumb decuprat și scoarțe cupro-plumboase. Compoziția scoarțelor este variabilă, depinzînd de timp și de faza de decuprare, ele conținînd o cantitate mare de plumb (55—70% Pb) și cupru (10—23% Cu). În prezent scoarțele plumboase obținute la decuprarea grobă și respectiv fină se amestecă și se prelucrează, în vederea recuperării metalelor printr-un procedeu combinat, care are ca fază principală topirea într-un cuptor rotativ scurt, urmată de decantare în vederea separării plumbului și a cuprului.

În lucrare se prezintă rezultatele cercetărilor experimentale proprii privind procesele de licuație în topiturile Pb—Cu, care vizează îmbunătățirea tehnologiei de prelucrare a scoarțelor cuproase.

---

* Asist. ing., Conf. dr. ing. ; Asist. ing., catedra Metalurgia metalelor neferoase

2. Tehnica de experimentare. Rezultate obținute și interpretarea lor

În unele uzine, în vederea prelucrării metalurgice, scoarțele cuproase obținute pe fază industrială la decuprarea grobă, se amestecă cu cele rezultate la decuprarea fină. Amestecul de scoarțe cuproase are compoziția chimică dată în tabelul 1. Acestea se supun prelucrării metalur-

Tabelul 1

Compoziția chimică medie a amestecului de scoarțe cupro-plumbosse

Elementul	Pb	Cu	Zn	Fe	S	Sb	As	SiO_2	Metale nobile + + altele
Conținutul, %	40—60	15—30	1—3	1—5	1—4	0,8—5	0,1—3	0,5—5	0,1—0,5

gice care are la bază procese de licuație obținîndu-se un aliaj Pb—Cu și plumb brut. Aliajul Pb—Cu, bogat în plumb este un bun colector al metalelor nobile (Au, Ag) din scoarțele cuproase. Din analiza chimică și metalografică a celor două faze rezultă o separare necorespunzătoare prin licuație, la răcire.

Astfel, analiza chimică indică următoarele compoziții :

— faza 1 : 50% Cu ; 32,30% Pb ; 0,82% Zn ;

— faza 2 : 94% Pb ; 5,0% Cu ; 1% Sb.

Din analiza metalografică (fig. 1) efectuată la microscopul MIM—8 se observă existența unei cantități importante de particule de cupru în matricea de plumb. Repartiția cuprului este destul de uniformă, indicînd o viteză de răcire mare în procesul de solidificare.

Condițiile experimentale pe care le-am impus s-au bazat pe studiul diagramei de echilibru Pb—Cu [2, 3,4, 5] (fig. 2). Conform acesteia sistemul binar Pb—Cu prezintă o transformare monotectică, o transformare eutectică și un domeniu de nemiscibilitate în stare lichidă. În stare solidă solubilitățile reciproce ale plumbului și cuprului sînt practic nule, iar peste 990°C, solubilitatea reciprocă a celor două elemente este totală [6].

Transformarea monotectică are loc la temperatura de 954°C și corespunde unui conținut de 14,7% at Pb (36% greut. Pb) :

$$L_1 \rightleftarrows Cu + L_{2\,(87\%\ Pb)}.$$

În intervalul de temperaturi 954 ÷ 326°C cristalizarea cuprului din lichidul L_2 se realizează conform reacției :

$$L_2 \xrightarrow{954 \div 326^\circ C} Cu + L_{2\,(99{,}94\%\ Pb)}$$

În punctul eutectic (326°C) reacția la solidificare este de forma :

$$L_{2\ (99{,}94\%\ Pb)} \xrightarrow{326°C} \text{eutectic (Cu + Pb)}$$

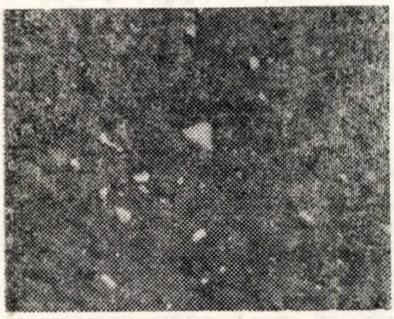


Fig. 1 — Microstructura aliajului Pb—Cu, obținut prin licuație, pe fază industrială. Mărime 200×.

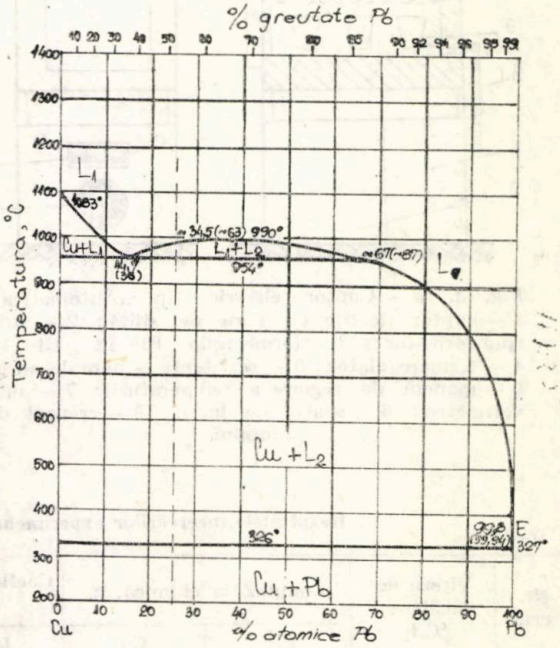


Fig. 2 — Diagrama de echilibru a sistemului Cu—Pb.

În încercările experimentale pe care le-am efectuat am urmărit separarea plumbului, (din aliajul Pb—Cu) cu conținut cît mai scăzut în cupru. S-au efectuat încercări de încălzire lentă a aliajului Pb—Cu, la diferiți gradienți de temperatură, pentru menținerea sistemului cît mai aproape de echilibru, în vederea realizării unei separări cît mai avansate prin licuație.

Experimentările s-au efectuat într-un cuptor electric cu rezistențe de silită tip „Automatica" (fig. 3, a). Creuzetele (fig. 3, b) în care s-au introdus probele de aliaj supus separării prin licuație sînt fabricate din alumină sinterizată, fiind prevăzute în partea superioară cu cîte o sită metalică din oțel inoxidabil și fiind acoperite pentru evitarea oxidării aliajului. Aliajul cu compoziția 35% Cu ; 56 Pb ; rest %Zn, Sb, Au, Ag, granulația Ø = 10—15 mm, este introdus pe sita metalică din creuzet urmînd ridicarea temperaturii pînă la 350°C și menținerea timp de cca 1 h. Apoi se ridică temperatura pînă la 550°C cu viteze diferite: 50°C/h, 25°C/h și 10°C/h. Pentru fiecare viteză de încălzire s-au efectuat

cîte 5 experienţe, în tabelul 2 fiind trecută media aritmetică a determinărilor.

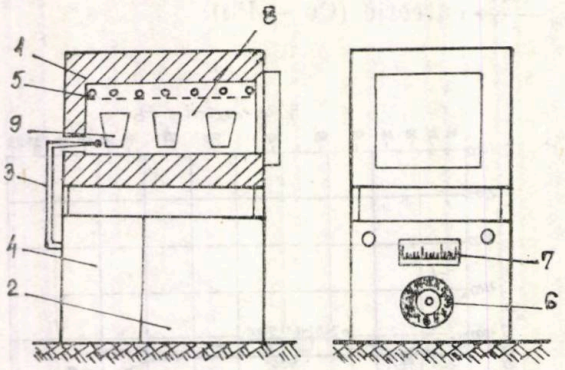


Fig. 3, a — Cuptor electric tip „Automatica": 1 — cuptor electric cu bare de silită; 2 — autotransformator; 3 — termocuplu Pt—Pt. Rh 10; 4 — termoregulator; 5 — rezistenţe — bare de silită; 6 — manetă de reglare a temperaturii; 7 — milivoltmetru; 8 — spaţiu de lucru; 9 — creuzet din alumină

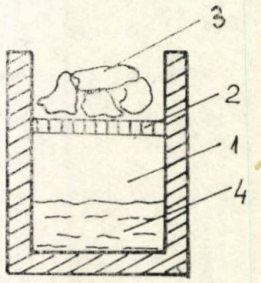


Fig. 3, b — Creuzet din alumină: 2 — sită metalică; 3 — aliaj; 4 — Pb lichid

Tabelul 2

Rezultatele încercărilor experimentale de laborator

Nr. crt.	Viteza de încălzire, °C/h	Compoziţia chimică, %		Coeficientul de repartiţie al metalelor		Fazele colectate
		Pb	Cu	L_{Pb}	L_{Cu}	
1	50	89,60	1,70	2,5	38	în creuzet
		35,50	63,50			pe sită
2	25	90,83	0,22	2,2	253	în creuzet
		40,10	58,30			pe sită
3	10	95,54	0,17	3,5	361	în creuzet
		27,0	61,50			pe sită

Teoretic, conform diagramei de echilibru binare, la încălzirea aliajului Pb—Cu în intervalul 350—550 °C are loc reacţia :

$$Cu + L_{2\ (99{,}94\%\ Pb)} \xrightarrow{350-550°C} L_{2\ (99{,}3\%\ Pb)}$$

Lichidul L_2 care conţine între 99,94 şi 99,30% Pb se scurge prin sită în creuzet. După răcire, aliajul din creuzet precum şi reziduul de pe sită s-au analizat chimic, rezultatele fiind prezentate în tabelul 2.

Din aceste date practice rezultate se poate observa că s-a realizat o separare foarte bună prin licuație a plumbului, acesta avînd o compoziție care permite introducerea acestuia la decuprare, urmată de rafinarea electrolitică, împreună cu plumbul brut obținut în procesul de topire reducătoare (în cuptoare Water-Jacket sau I.S.P.),

3. Concluzii

Practic s-a constatat că lichidul L_2 care se scurge în creuzet are compoziția diferită de cea corespunzătoare diagramei de echilibru Cu—Pb. La scăderea vitezei de încălzire, de la 50°C/h la 10°C/h, la încălzirea aliajului Cu—Pb, are loc îmbogățirea sensibilă cu plumb a fazei lichide L_2 rezultate prin segregare (licuație).

Coeficienții de repartiție (L_{Me}) ai metalelor (Pb, Cu) între faza lichidă colectată în creuzet (faza 1) și faza solidă (faza 2), rămasă pe sită, s-au calculat conform relațiilor :

$$L_{Pb} = \frac{[\%\ Pb]_1}{[\%\ Pb]_2} \quad \text{și} \quad L_{Cu} = \frac{[\%\ Cu]_2}{[\%\ Cu]_1},$$

în care : % Pb și % Cu reprezintă concentrațiile de Pb și respectiv Cu la temperatura considerată constantă.

Din datele obținute, rezultă creșterea evidentă a coeficienților de repartiție a plumbului și cuprului în cele două faze, la scăderea vitezei de încălzire, ceea ce corespunde, evident, apropierii de echilibru a sistemului la gradiente mici de temperatură. La încălzirea repetată a fazei solide cu viteze mici de încălzire se poate recupera o cantitate însemnată de plumb prin licuație.

BIBLIOGRAFIE

1. *Fl. Oprea*, Teoria proceselor metalurgice. Editura didactică și pedagogică, București 1966.
2. *S. Gâdea, M. Petrescu*, Metalurgie fizică și studiul metalelor. Editura didactică și pedagogică București 1979, vol, 1. .
3. *M. Hansen*, Constitution of binary alloys, Metallurgy and metallurgical engineering, Ne-York, Toronto, Londra, 1958 .
4. *M. V. Malțev ș.a.*, Metalografia tsvetnîh metallov i splavov, Moskwa, 1960.
5. *O. M. Barabasch, I. N. Kovali*, Structura i svoistva metallov i splavov, Kiev, N. D., 1986
6. *J. J. Jacobs, R. H. Maes*, Investigație în domeniul de miscibilitate lichidă în sistemul Pb—Cu—Fe—As. Trans. of Metallurgical Society of AIME, vol. 239 Aug. 1967, pag. 1 166.

Processes of Liquation at Pyrometallurgical Processing of Copper-Lead Crusts Obtained in Liquation Refining of Lead from Copper

The experimental tests have in view of the alloy composition improvement obtained in the second phase of the operating process by obtaining two phases with high contents of metal (Pb or Cu).

This work have been done through studies of lead—copper phase diagram by heating the respective alloy with different temperature gradients.

BOOKS

M. Taloi, OPTIMIZAREA PROCESELOR TEHNOLOGICE. APLICAȚII ÎN METALURGIE/ Optimization of technological processes. Applications in metallurgy, Editura Academiei R. S. România, 1987, 374 p.

Contents : Mathematical methods for modelling technological processes ; Systems and their models ; Theoretical basis of metallurgical processes ; Premodelling ; Mathematical modelling through the classic experiment ; Mathematical modelling through the active experiment ; Special programs for modelling technological processes ; Optimizing methods for technological processes : Optimization of some metallurgical processes.

E. Cazimirovici, M. Guțu, I. Moldovan, CARTEA LAMINORISTULUI/Mill Worker's Handbook, Editura Tehnică, București, 1987, 272 p.

The book presents fundamental knowledge on preparation and manufacturing of laminated products.

After classification, technological flows and types of rolling mills, the authors describe rolling technologies of blanks, sections, plates, tapes and tubes, installations, and finally technical and economic data and aspects on work protection.

TEZE DE DOCTORAT SUSȚINUTE ÎN 1987—1988

Gheorghe Papoi — Contribuții la studiul influenței calității încărcăturii (algomerat, palete) asupra desfășurării proceselor din furnal. (16.XII.1987) Conducător științific prof. dr. ing. Silvia Vacu

Gabriela Georgeta Ionescu — Contribuție la realizarea prin difuzie a straturilor de carburi metalice dure la diverse piese și scule utilizate în construcția de mașini în vederea creșterii fiabilității acestora în exploatare (24.II.1988). Conducător științific prof. dr. docent Suzana Gâdea

Gherman Dascălu — Influența factorilor fizico-chimici de la elaborarea și turnarea lingourilor cilindrice asupra caracteristicilor roților monobloc (30.III.1988) Conducător științific prof. dr. docent Iosif Tripșa

Mircea Surdulescu — Cercetători privind turnarea aliajelor în cimp magnetic (18.V.1988) Conducător științific prof. dr. ing. Laurentie Sofroni

Mihai Chișamera — Cercetări privind elaborarea fontelor cu grafit compact destinate turnării pieselor solicitate la șoc termic (30.VI.1988) Conducător științific prof. dr. ing. Laurentie Sofroni

MŰSZAKI INFORMÁCIÓS ARCHÍVUM 1883

c. 2711 — I. P. Informația

40.480

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI ELECTROTEHNICA, ENERGETICA, AUTOMATICA-CALCULATOARE, ELECTRONICA, MECANICA, CONSTRUCŢII DE MAŞINI TRANSPORTURI-AERONAVE, CHIMIE, METALURGIE

apare în continuarea vechilor periodice ştiinţifice : „Bulletin de Mathématiques et de Physiques pures et appliquées", „Buletinul Politehnicei din Bucureşti" şi „Buletinul Institutului politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti".

Organizat pe baze noi, el reflectă în primul rînd activitatea ştiinţifică a corpului didactic din institut. În limita spaţiului disponibil, se pot publica şi lucrări ştiinţifice ale colaboratorilor din afara institutului.

Corespondenţa privind articolele, schimburile de publicaţii şi abonamentele se fac pe adresa institutului.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI ЭЛЕКТРОТЕХНИКА, ЭНЕРГЕТИКА, АВТОМАТИКА-СЧЕТНО-ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МАШИНЫ, ЭЛЕКТРОНИКА, МЕХАНИКА, МАШИНОСТРОЕНИЕ, ТРАНСПОРТ—САМОЛЕТОСТРОЕНИЕ ХИМИЯ, МЕТАЛУРГИЯ

продолжает прежних научных периодических журналов „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées", „Buletinul Politehnicei din Bucureşti" и „Buletinul Institutului politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti".

Составленный на новых основах он отражает в первую очередь научную деятельность преподавательского состава Бухарестского политехнического института. В пределах возможностей будут опубликоваться и научно-исследовательские работы специалистов извне.

Переписка, обмен периодическими изданиями и подписка производятся по адресу института.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI ELECTROTECHNICS, ENERGETICS, AUTOMATIC CONTROL-COMPUTERS, ELECTRONICS, MECHANICS, MACHINE BUILDING, TRANSPORT-AERONAUTICS, CHEMISTRY, METALLURGY

The Bulletin continues the old scientific periodicals : „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées", „Buletinul Politehnicei din Bucureşti" and „Buletinul Institutului politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti"

Organized on a new basis, it primarily reflects the scientific activity of the academic staff from Institute. Researchers from outside the institute can also publish their papers within the available space.

The correspondance regarding the articles, change of publications and subscriptions are sent to the following address.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI ELECTROTECHNIQUE, ENERGETIQUE, AUTOMATIQUE-ORDINATEURS, ELECTRONIQUE, MECANIQUE, CONSTRUCTIONS MECANIQUES, TRANSPORTS-AERONAUTIQUE, CHIMIE, METALLURGIE

continues les anciens périodiques scientifiques : „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées", „Buletinul Politehnicei din Bucureşti" et „Buletinul Institutului politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti".

Organisé sur de nouveaux principes il reflète tout d'abord l'activité scientifique du corps enseignant de l'Institut. Dans la limite de l'espace disponible on peut y publier aussi les travaux scientifiques des collaborateurs de l'extérieur.

L'adresse pour la correspondance concernant les articles, les échanges de publications et les abonnements est :

INSTITUTUL POLITEHNIC BUCUREŞTI
ROMÂNIA

Splaiul Independenţei nr. 313
Căsuţa Poştală nr. 2356

1950 NOV. 27

Loi 35